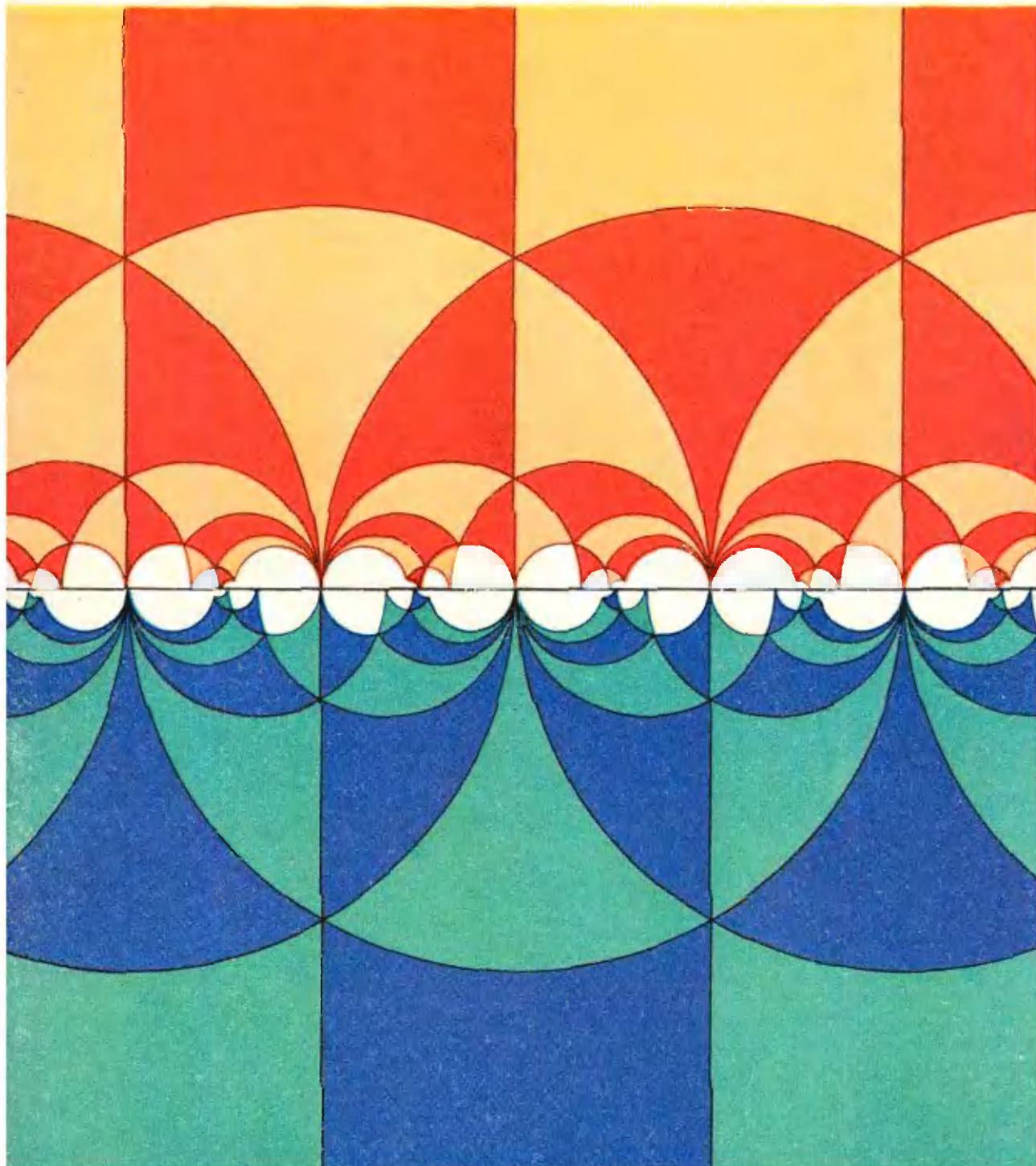


Квант

*Научно-популярный
физико-математический
журнал*



Знаменитый физик-теоретик первой половины XX века Пауль Эренфест вместе с женой Татьяной Алексеевной Афанасьевой с 1907 по 1912 год жил в России. Он оказал большое влияние на развитие русской физики. В организованном им домашнем семинаре занимались известные советские физики и математики А. Ф. Иоффе, Д. С. Рождественский, А. А. Фридман, С. Н. Бернштейн и другие. В 1912 году он переехал в Лейден (Голландия), где стал заведовать университетской кафедрой физики вместо вышедшего в отставку по возрасту выдающегося голландского физика Гендрика Лоренца. До последних дней жизни Эренфест сохранял дружеские отношения со многими советскими физиками и огромный интерес к нашей стране и ее молодой науке.

Многие советские ученые, командированные за границу, гостили у Эренфеста. В его доме была выделена специальная комната для гостей, которые перед отъездом по традиции расписывались на одной из стен. Мы воспроизводим здесь два фрагмента этих подписей. На первом отчетливо видны подписи академиков П. Л. Капицы, А. Ф. Иоффе и А. Н. Фрумкина (помечены цифрами 1, 2 и 3). Кроме них также видны подписи американского физика Роберта Милликена, первым измерившего величину заряда электрона, и Альберта Эйнштейна. На втором фрагменте мы видим подписи профессора А. А. Эйхенвальда и члена-корреспондента АН СССР А. И. Шальникова (помечены цифрами 4 и 5). Кроме них имеются также подписи Эйнштейна, Нильса Бора, Эрвина Шредингера, Поля Дирака, Вольфганга Паули и выдающегося немецкого математика Феликса Клейна.

auf 8. August, 20. 10. August 1924 von
seinem Gesandten Dr. G. Hertz
Paul Ehrenfest

(5. IV - 22 IV *A. Bohr*)
1924

R. A. Millikan

6/6/1923 - 4

G. Hertz. 7. 6. 1924

Leonard B. Loeb 21. 6. 1924

Ada Vogel. 7-12. Aug. 24

Einstein 7-23 X 24 VK

W. Franck 11-23 X 24

A. Frumkin 11-12. 11. 24

E. Bauer 15-11. 24

K. Sauer 1 VII 24

G. Hertz 21. 1. 25

A. Einstein 7-12. X 28. *G. Hertz*

N. Bohr 4-3-1928

O. Klein 4-3-1928

E. Schrödinger 21-3-1928

Annemone Schrödinger 21.3.1928

B. A. M. Dirac -I 1928

A. Eichenwald V, 1928

E. J. Dyksterhuis 10 Juli 1928

A. Mannich 26 Juli 1928
27
28
29!!!!

W. Pauli 25 IX 1928

B. L. d. Wankel 20. 10. 28

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кирилин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбург
А. И. Шишов

Редакция:

В. Н. Березин
А. Н. Виленин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
(художественный редактор)
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чершова
(зам. редакцией)

В НОМЕРЕ:

- 2 В. Болтянский. Загадка «аксономы параллельных»
9 С. Гиндикин. Волшебный мир Апри Пуанкаре
18 А. Шишов. Модель Кэли—Клейна геометрии Лобачевского
26 М. Волькенштейн. Квантование и стоячие волны

Лаборатория «Кванта»

- 34 В. Майер. Опыты по полному внутреннему отражению

Задачник «Кванта»

- 36 Победители конкурса «Кванта»
38 Задачи М371 — М375; Ф383 — Ф387
39 Решения задач М331—М335; Ф343—Ф347

Практикум абитуриента

- 51 В. Ляховский. Логарифмические и показательные ...
58 А. Диденко, Г. Дубровский. Применение диаграмм тепловых процессов
63 Ю. Нестеренко, М. Потанов, А. Склянкин, Н. Тяпунина. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

«Квант» для младших школьников

- 68 Задачи
69 Е. Семенов. Ошибки Степы Мошкина
74 Ответы, указания, решения

Смесь (с. 25, 50, 67)

На обложке изображена «модулярная фигура», играющая важную роль в теории функций и теории чисел. Впервые она появилась у Гаусса. С точки зрения модели Пуанкаре плоскости Лобачевского (см. статью «Волшебный мир Апри Пуанкаре») — это покрытие двух плоскостей Лобачевского конгруэнтными «равнобедренными» треугольниками, у которых боковые стороны параллельны, а углы при основании равны 60° . На евклидовой плоскости таких треугольников, конечно, нет. Треугольники, все время уменьшаясь в своих «евклидовых» размерах (но не с точки зрения геометрии Лобачевского), «прижимаются» к линии, разделяющей плоскости.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год

В. Болтянский

Загадка «аксиомы параллельных»



Необычная ассоциация

В одном городе учредили ассоциацию коллекционеров, объединившую филателистов, нумизматов, собирателей игольных ушков и т. п. Решили, что правление ассоциации должно состоять из нечетного числа персон (это удобно при голосовании). Решили также, что правление разместится в одном здании, причем у каждой персоны (т. е. члена правления) будет свой телефонный аппарат внутренней связи. А чтобы не усложнять устройство внутренней связи, решили коммутатор не устанавливать, а прямо соединить каждую персону телефонными линиями с какими-либо тремя персонами.

— Ну, что же, — сказал один из учредителей ассоциации, — я думаю, такая организация работы правления достаточно удобна.

— Особенно мне нравится, — сказал второй (известный Собиратель математических диковинок), — что работу правления можно описать абстрактной аксиоматической схемой. Судите сами, у нас есть три первоначальных понятия: «персона», «линия», «соединяет», и мы хотим, чтобы выполнялись следующие аксиомы:

- 1) число персон нечетно;
- 2) каждая линия соединяет ровно две персоны;
- 3) каждая персона соединена линиями ровно с тремя другими персонами.

— Ну, а какой смысл в этой аксиоматике? Можно ли из нее вывести какие-либо теоремы, чтобы получилась «теория», отражающая работу нашего правления?

— Отчего же, извольте! Во-первых, аксиома 1 показывает, что хотя бы одна персона существует (ведь нуль — четное число!). Далее, аксиома 3 убеждает нас, что поскольку есть хотя бы одна персона, то найдутся еще три другие, так что общее число персон не меньше четырех. Наконец, еще раз применяя аксиому 1, находим, что *общее число персон*

не меньше пяти. Такова первая теорема этой «теории».

— Что же, это утверждение, в самом деле, можно считать теоремой, поскольку вы его доказали, то есть, логически вывели из аксиом.

— Или вот еще пример очень простой теоремы: *среди любых пяти персон обязательно найдутся две, которые не соединены линией.*

— Ну, это понятно: иначе к каждому из этих пяти было бы подведено не менее четырех линий.

— Совершенно верно! Кстати, вы сказали: линия «подведена» к персоне. Этому можно дать четкое определение в рамках нашей аксиоматики. Именно, если A — некоторая персона и l — линия, соединяющая ее с некоторой другой персоной, то пару (A, l) будем называть *вводом*.

— И теперь можно сказать, что каждая персона A участвует ровно в трех вводах $(A, l_1), (A, l_2), (A, l_3)$. Это и будет означать, что к A «подведены» три линии l_1, l_2, l_3 (аксиома 3).

— Прекрасно! — заулыбался Собиратель математических диковинок.

— Продолжая ваше рассуждение, можно сформулировать следующую теорему: *число всех вводов нечетно.* Ведь персон — нечетное число (аксиома 1), и каждая участвует ровно в трех вводах.

Внезапно лицо Собирателя омрачилось. Голос его стал унылым.

— К сожалению, можно доказать также и то, что *число вводов четно.* Ведь каждая линия l (соединяющая, скажем, персоны A и B) участвует в двух вводах: (A, l) и (B, l) , так что число всех вводов в двое больше числа всех линий.

— Да, но это же противоречит предыдущей теореме?

— В том-то и беда. Выходит, наша аксиоматика *противоречива*, раз из нее можно вывести две теоремы, противоречащие друг другу. Так что лопнула наша теория: систему связи, описываемую аксиомами 1, 2 и 3, просто невозможно осуществить.

Другая аксиоматика

— Что же нам делать? Пойти на то, чтобы число членов правления было четным? Но ведь нам так хотелось этого избежать!

— Почему же, есть и другой выход, — ответил Собиратель математических диковинок. — Оставим аксиомы 1 и 2 прежними, а третью аксиому заменим следующей:

3') *каждая персона соединена линиями ровно с четырьмя другими персонами.*

Правда, придется проложить большее число линий, но зато аксиоматика станет непротиворечивой, да и теоремы сохранятся. По-прежнему, общее число персон не менее пяти; из любых шести персон найдутся две, которые не соединены линией; общее число вводов будет четным (и здесь уже нет никакого противоречия). Можно будет доказать и дальнейшие теоремы.

— Позвольте, но почему вы так уверены в отсутствии противоречий? Да, с числом вводов теперь все в порядке; но, возможно, доказывая все новые и новые теоремы, мы все же натолкнемся когда-нибудь на противоречие. Ведь не будете же вы утверждать, что заранее знаете *все* теоремы, которые можно доказать в теории, основанной на этой новой аксиоматике! А если так, то кто же может гарантировать отсутствие противоречий?

— О, здесь я вполне уверен! Сейчас я объясню вам причину такой уверенности. Вы ведь, надеюсь, не сомневаетесь в «правильности» арифметики?

— Нисколько не сомневаюсь; но арифметика-то тут причем?

— А вот причем. Я сейчас из «материала» арифметики построю, как говорят математики, *модель* для рассматриваемой аксиоматики. Кстати, сколько персон (ориентировочно) будет в правлении?

— Думаю, не меньше 30 человек.

— Прекрасно! Условимся считать

«персонами» числа $1, 2, \dots, 36, 37$.

Удобно расположить их на окружности (рис. 1), чтобы за 37 «следующим» было число 1. Теперь «линиями» будем называть пары чисел, причем лишь такие пары, в которых числа стоят либо рядом, либо через одно на этой окружности. Например, «линиями» будут пары $(1; 3)$, $(4; 5)$, $(37; 2)$; а вот пара $(3; 6)$ «линией» не будет — числа стоят слишком далеко друг от друга.

— Кажется, я понял, что вы хотите. В этой, как вы сказали, модели, есть 37 «персон», т. е. нечетное число (аксиома 1). Каждая линия соединяет ровно две персоны (аксиома 2), так как пара состоит из двух чисел.

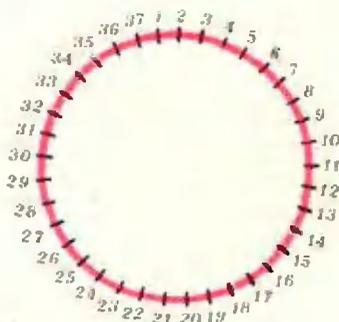


Рис. 1.

Кроме того, ясно, что в каждой «персоне» проведены ровно четыре линии (аксиома 3); это можно пояснить схемой, показанной на рисунке 2. Значит, в этой модели выполняются все аксиомы 1, 2, 3. Однако почему же это гарантирует непротиворечивость рассматриваемой аксиоматики?

— Так ведь модель-то эта «сделана» из чисел! Если бы из аксиом 1, 2 и 3 можно было вывести две противоречащие друг другу теоремы, то это противоречие обнаружилось бы и в этой модели. Выходит, что, рассуждая о числах, мы могли бы получить противоречие. Но, кажется, в непогрешимости арифметики вы не сомневаетесь?

— Ну, что же, я понял ваши доводы. И, позвольте, повторю их, так сказать, в общем виде. Вы рассматри-

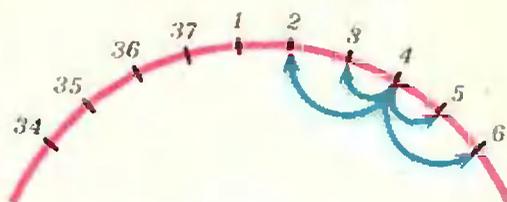


Рис. 2.

ваете две теории, P и Q . Теория P (в качестве нее была взята арифметика) не вызывает сомнений, рассматривается, как неизменная и непогрешимая. Теория же Q — это новая теория, определяемая списком аксиом. Нам нужно получить гарантии непротиворечивости теории Q . Для этой цели применяется такой прием: из понятий теории P , как из «строительного материала», пытаются построить модель теории Q , то есть такую схему, в которой все аксиомы теории Q выполняются; если это удастся сделать, то тем самым непротиворечивость теории Q доказана.

Странная геометрия

— Мы несколько отошли от обсуждения вопросов, связанных с ассоциацией коллекционеров. Но поскольку я коллекционирую математические диковинки, я хочу сейчас предложить вам одну из них: довольно необычную модель геометрии.

— С удовольствием «взгляну» на эту диковинку.

— Представьте, что из плоскости

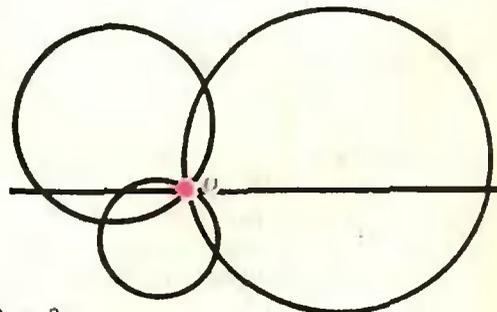


Рис. 3.

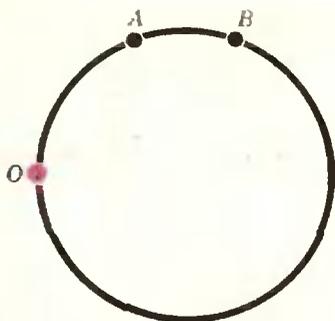


Рис. 4.

удалена (или, как говорят математики, *выколота*) одна точка O (она, конечно, есть, но мы как бы не считаем ее «точкой»). Все же остальные точки (отличные от O) по-прежнему будем считать точками.

— В этом весь фокус?

— Минуточку терпения. Каждую окружность, проходящую через эту выколотую точку O , будем теперь называть «прямой» (сюда же отнесем и «окружности бесконечного радиуса», то есть прямые, проходящие через O). На рисунке 3 изображено несколько «прямых».

— Это уже необычно. Берем заведомо искривленные линии и объявляем их «прямыми». Только зачем это?

— Давайте, для примера, проведем «прямую» через две точки A и B . Как это сделать?

— Вы хотите, чтобы «прямая» проходила через точки A и B . Кроме того, раз это «прямая», то она должна проходить и через точку O . Значит, надо провести окружность через три точки A , B , O (рис. 4). Это сможет сделать каждый школьник.

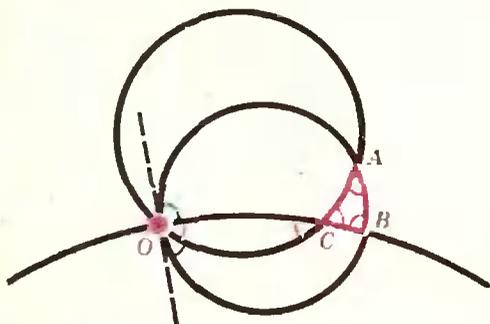


Рис. 5.

— Но такая «прямая» существует и притом *только одна*. Вы согласны?

— Да, поскольку три точки однозначно определяют окружность.

— Значит, в этой модели выполняется аксиома: *через две разные точки проходит прямая и притом только одна*.

— Кажется, меня начинает интересовать ваша диковинка.

— А теперь посмотрите на рисунок 5. На нем изображен треугольник ABC . Чтобы найти сумму углов этого треугольника, можно взять сумму отмеченных углов при точке O . А углы эти составляют вместе развернутый угол. Значит, в этой модели *сумма углов треугольника равна $2d$* .

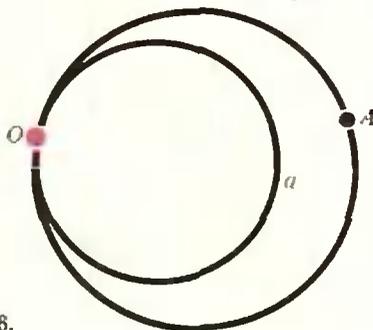


Рис. 6.

— Потрясающе!

— Заметьте еще, что в этой модели через точку, лежащую вне данной «прямой», проходит единственная «прямая», не пересекающая данной. Это будет окружность, касающаяся данной «прямой» в точке O (рис. 6): ведь точка O считается выколотой, так что две изображенные «прямые» не имеют общих точек.

— Выходит, что в этой модели выполняется и «аксиома параллельных»?

— Совершенно верно. И вообще, в этой модели выполняются все аксиомы (а значит, и теоремы) той геометрии, которая изучается в школе (ее называют *геометрией Евклида*, по имени ученого, который свыше

2000 лет назад дал систематическое ее изложение). Правда, я описал модель не до конца. Не было сказано, как измерять длины, какие треугольники следует считать равнобедренными, и т. д. Кроме того, надо добавить еще точку ∞^*) для полноты этой модели. Но сущность дела ясна: мы построили модель обычной (евклидовой) геометрии.

— Что же получается? Исходная теория P — это геометрия, и из «материала» этой теории построена модель той же самой теории?

— Совершенно справедливо! Привел же эту модель я лишь для того, чтобы показать, что не так уж странно считать кривые линии «прямыми» в некоторой модели ^{**)}.

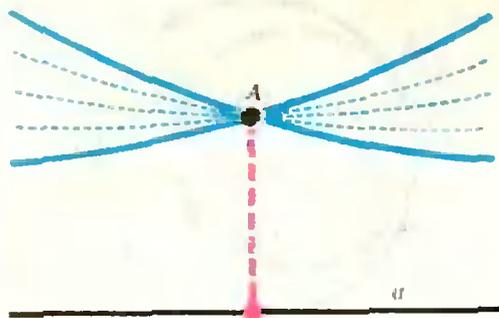


Рис. 7.

Трагедия Лобачевского

— А теперь — еще один экзонат из коллекции математических диковинок. Речь идет о геометрии, открытой великим русским математиком Н. И. Лобачевским.

— Насколько я знаю, он построил геометрию, в которой через точку можно провести более одной параллельной к данной прямой (рис. 7).

— Верно. И хотя все рассуждения Лобачевского были логически бе-

*) ∞ — это «бесконечно удаленная точка».

**) Читателю мы советуем понять, «что» в этой модели «к чему»; для этого полезно воспользоваться шпиретей.



Рис. 8.

зупречны, он при жизни так и не добился признания своих идей. Слишком уж необычны были выводы.

— Например?

— Ну, например, параллельные прямые сближаются (рис. 8). Можно даже построить «бесконечный треугольник», стороны которого попарно параллельны (рис. 9). И хотя на рисунке 9 изображены кривые линии, в геометрии Лобачевского существуют п р я м ы е, которые именно так расположены. Далее, сумма углов треугольника всегда м е н ь ш е 2 d и т. д., и т. п.

— Но ведь это же все не так на самом деле!!!

— Вот, вот! То же говорили и современники Лобачевского. А он понимал, что дело-то здесь в том, противоречива или же нет та геометрия, которая получается из положенных в ее основу аксиом; кроме того, разговоры: «в действительности все не так», — основаны лишь на том, что нашим наблюдениям доступна небольшая часть пространства, где различия между евклидовой геометрией и его геометрией н е з а м е т н ы (лежат за пределами точности измерений). И, кстати, современная физика все более подтверждает это.

— Удивительно. Но вы, насколько я понял, хотели говорить о чисто

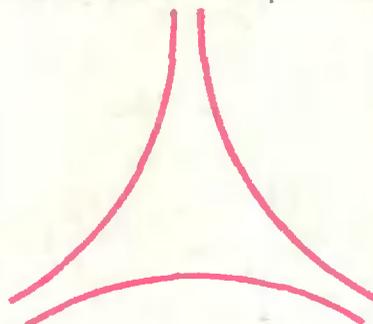


Рис. 9.

математическом подтверждении правильности геометрии Лобачевского?

— Точнее, о ее *непротиворечивости*.

— Ах, понимаю! Видимо, вы хотите сказать, что из «материала» какой-то теории P , в правильности которой мы не сомневаемся, можно построить модель геометрии Лобачевского?

— Совершенно верно! И этой теорией P является евклидова геометрия! Оказывается, из «материала» геометрии Евклида можно построить модель геометрии Лобачевского.

— И что же, Лобачевский знал об этом?

— Нет; но он построил другую замечательную модель. Ему удалось из «материала» своей геометрии построить модель евклидовой геометрии.

— Значит, если бы все были уверены в непогрешимости геометрии Лобачевского и сомневались в правильности геометрии Евклида, то этой моделью можно было бы убедить всех, что геометрия Евклида тоже непротиворечива! А ведь желательно, чтобы все было наоборот.

Запоздалая справедливость

— Вы теперь видите, что Лобачевский хорошо понимал, что такое модель, и как можно было бы доказать непротиворечивость его геометрии. Надо было, приняв евклидову геометрию за исходную теорию P , построить из ее «материала» модель теории Q — геометрии Лобачевского. Но Лобачевскому не удалось сделать это. Такие модели были найдены лишь после смерти ученого.

— Кто же сделал это?

— Бельтрами, Кэли, Клейн, Пуанкаре и другие ученые*).

— И что же, эти модели очень сложны?

— Нет. Вот как, например, строится модель, найденная выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре*). В этой модели рассматриваются только точки, лежащие внутри некоторого круга K . «Прямые» же определяются так: берется окружность под прямым углом окружности K , и часть этой окружности, лежащая внутри K , объявляется «прямой». На рисунке 10 показано несколько «прямых» в этой модели.

— Эта модель немного напоминает модель геометрии Евклида, о которой мы говорили раньше. Там тоже в качестве «прямых» были взяты окружности.

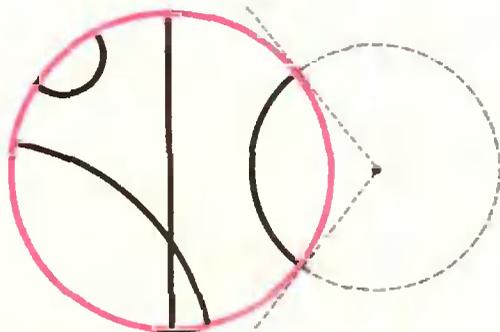


Рис. 10.

— И, обратите внимание, в этой модели тоже можно доказать, что через две точки проходит единственная «прямая». Можно в этой модели рассматривать треугольники (рис. 11). А рисунок 12 показывает, что через точку вне «прямой» a можно провести *бесконечно много* «прямых», не пересекающихся с «прямой» a . Две из них (те, которые касаются прямой a на границе круга K , то

*) См., например, статью С. Гиндикина «Феликс Клейн», «Квант», 1975, № 12.

*) В статье С. Гиндикина «Волшебный мир Анри Пуанкаре» (с. 9), рассказывается о модели, в которой «точками» служат точки верхней полуплоскости, а прямыми — вертикальные лучи и ортогональные к граничной прямой верхние полуокружности. Подумайте, почему это — одинаковые модели (вспомните об иверсии).

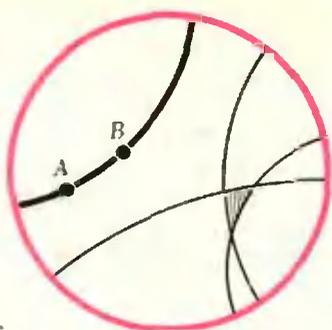


Рис. 11.

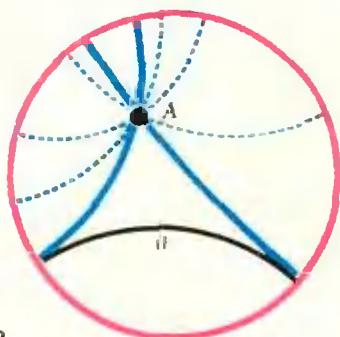


Рис. 12.

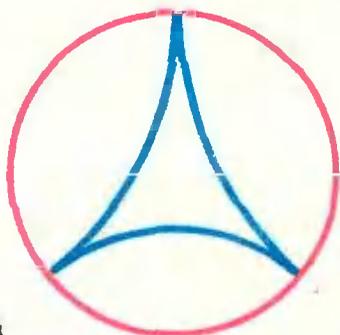


Рис. 13.

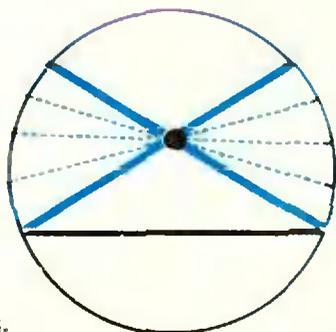


Рис. 14.

есть как бы в «бесконечно удаленных точках») параллельны прямой a . Ну, а на рисунке 13 изображен «бесконечный треугольник», стороны которого попарно параллельны. Короче, это есть модель именно геометрии Лобачевского. Конечно, я описал эту модель далеко не полностью: надо указать, как измеряются длины, определить, какие фигуры считаются равными (конгруэнтными) и т. д. Но в общих чертах модель строится именно так.

— А другие ученые, имена которых вы назвали, построили такую же модель?

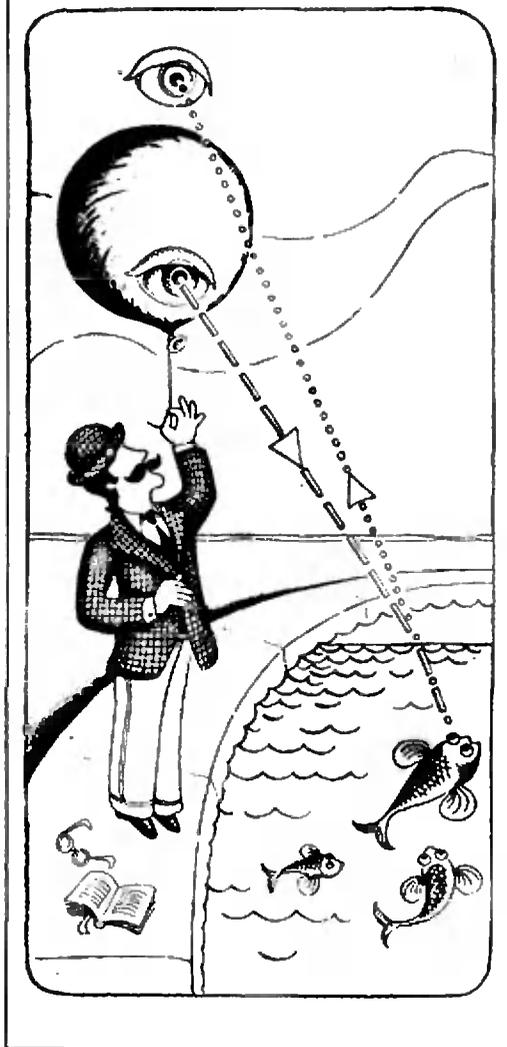
— О нет! Сейчас известно много разных моделей геометрии Лобачевского. Например, в работах Клейна и Кэли построена модель, в которой тоже рассматриваются только точки, лежащие внутри некоторого круга K , но «прямыми» у них считаются хорды этого круга (без концов). На этой модели еще проще увидеть, что через точку вне «прямой» a проходит бесконечно много «прямых», не пересекающихся с a (рис. 14). Однако углы, например, в этой модели измеряются сложнее, чем в модели Пуанкаре.

— Да, ваши «математические диковинки» очень интересны. Теперь понятно значение открытия Н. И. Лобачевского, который не только построил совершенно необычную геометрию, но и положил начало для нахождения все новых и новых «геометрий». Я слышал, что математика сейчас рассматривает много разных пространств и геометрий, причем они применяются в физике и других областях. Наверно, и в вашей коллекции есть немало удивительных пространств, геометрий, математических «миров»?

— Есть, конечно. Но об этом поговорим как-нибудь в другой раз.

С. Гиндикин

Волшебный мир Анри Пуанкаре



Я описал воображаемый мир, обитатели которого неминуемо должны были бы прийти к созданию геометрии Лобачевского.

А. Пуанкаре

Когда сегодня рассказывают историю геометрии Лобачевского, может сложиться впечатление, что докажи создатели неевклидовой геометрии ее непротиворечивость — и она была бы благосклонно принята. Однако прежде всего критиков смущало не отсутствие этого доказательства. Люди привыкли, что геометрия имеет дело с нашим реальным пространством и что это пространство описывается евклидовой геометрией. Характерно, что Гаусс выделял геометрию среди остальных разделов математики, считая ее подобно механике экспериментальной наукой. Но при этом Гаусс, так же как и Лобачевский и Бойяи, понимал, что, во-первых, возможны логически стройные геометрические построения, за которыми не стоит физическая реальность — «воображаемые» геометрии, и, во-вторых, не столь бесспорно, что в астрономических масштабах в нашем мире царит геометрия Евклида. Однако то, что понимали лишь немногие математики, было абсолютно недоступно непрофессионалам. Утверждения геометрии Лобачевского они мерили на евклидов аршин своей геометрической интуиции — и получали неисчерпаемый источник для остроумия. Н. Г. Чернышевский писал сыновьям из ссылки, что над Лобачевским смеялась вся Казань: «Что такое «кривизна луча» или «кривое пространство»? Что такое геометрия без аксиомы параллельных линий»? Он сравнивает это с «возведением сапог в квадраты» и «извлечением корней из голенищ», и говорит, что это столь же нелепо, как «писать по-русски без глаголов» (здесь достается Фету: «шелест, робкое дыханье, трели соловья», над которым, оказывается, тоже «хохотали до боли в боках»).

Новый этап в развитии неевклидовой геометрии наступил, когда по-

явились первые ее модели *). Сейчас мы воспринимаем эти модели как средство для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского; но они были замечательны не только этим. Даже при благожелательном взгляде геометрия Лобачевского казалась чересчур изощренной, не связанной с остальной математикой, а модель Кэли — Клейна показала, что она естественным образом возникает на столбовой дороге проективной геометрии, очень популярной в то время! С другой стороны, рассмотрение модели, основные понятия которой конструируются из образов привычной нам евклидовой геометрии, давало возможность заменить формальное аксиоматическое изложение неевклидовой геометрии более наглядным.

Еще одну модель придумал Анри Пуанкаре, занимаясь чисто аналитическими вопросами теории функций комплексного переменного. Он неожиданно обнаружил, что появляющиеся у него преобразования можно интерпретировать как *перемещения* в плоскости Лобачевского. Это открытие произвело на него настолько сильное впечатление, что много лет спустя он вспоминал, как оно пришло ему в голову: «без всяких, казалось бы, предшествовавших раздумий», когда он поднимался на подножку омнибуса во время экскурсии в Кутанс. Через десять лет Пуанкаре сделал замечательное дополнение к своей модели — подвел под нее «физическое» основание. Рассказу о модели Пуанкаре и посвящена эта статья.

Экскурсия в физику

Наша геометрические представления имеют физические предпосылки. На-

пример, как прямые мы воспринимаем световые лучи. Идущий к нам световой луч продолжает казаться прямым, даже если он преломился по дороге (например, войдя из воздуха в воду). Чтобы рассеять эту иллюзию, нужно поставить эксперимент, или посмотреть на происходящее со стороны.

Пусть у нас есть оптически неоднородная среда на верхней полуплоскости ($y > 0$), в которой величина скорости света меняется по закону: $c(x, y) = y$ (независимо от направления луча). Из принципа Ферма следует, что путь распространения света между двумя точками есть такой путь, для прохождения которого свету требуется наименьшее возмож-

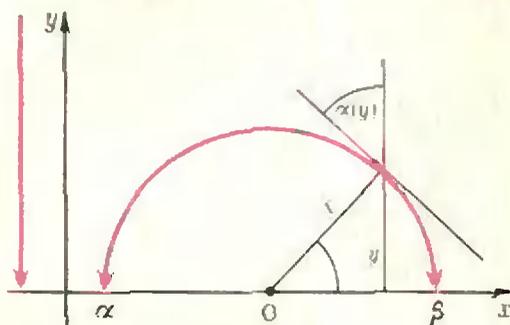


Рис. 1.

ное время. В нашей среде (где $c(x, y) = y$) свет между двумя точками будет распространяться по таким кривым L (рис. 1), для которых

$$\frac{\sin \alpha(y)}{y} = k, \quad (1)$$

где $\alpha(y)$ — угол, который касательная, проведенная к L в точке с ординатой y , образует с вертикалью *); k — фиксированное для всех точек кривой L число. Ясно, что условию (1) удовлетворяют все окружности с центрами на оси x -ов (то есть, перпендикулярные этой оси): для каждой такой окружности $k = \frac{1}{r}$, где

* О моделях см. статьи В. Болтинского «Загадка аксиомы параллельных» (с. 2) и А. Широкова «Модель Кэли — Клейна геометрии Лобачевского» (с. 18), а также статью С. Гиндикина «Феликс Клейн», опубликованную в «Кванте» № 12 за 1975 год.

* См. статью С. Верова «Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды», «Квант», 1975, № 12.

r — ее радиус. При $k=0$ мы получим вертикальные прямые. Можно показать, что других кривых, удовлетворяющих условию (1), нет; этому есть и физическое объяснение (например, такое: свет распространяется из заданной точки в заданном направлении по единственному пути).

Окружности, перпендикулярные к оси x -ов, и вертикальные прямые (вернее, их части, расположенные в верхней полуплоскости) и будут играть главную роль в нашем рассказе.

«Пуанкария» и ее геометрия

Мир Пуанкаре (назовем его в честь создателя *Пуанкарией*) представляет собой верхнюю полуплоскость $\{(x, y)$,

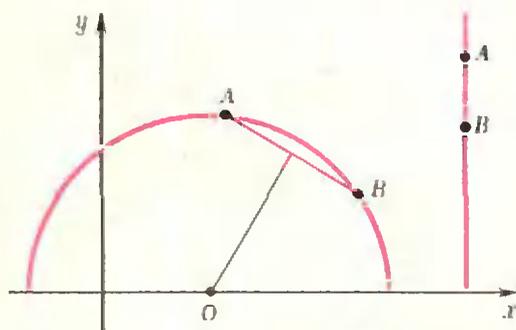


Рис. 2.

$y > 0$) без границы $\{y=0\}$ (это важно!) *). Существа, населяющие Пуанкарию (*пуанкариане*), воспринимают как «прямые» верхние полуокружности с центрами на оси x -ов (без концов!) и вертикальные лучи (рис. 2). Будем называть эти прямые p -прямыми. P -прямые кажутся пуанкарианам бесконечными (свет распространяется по ним неограниченно долго), а концы p -прямых, — как и вся ось x -ов, — невидимыми. Итак, пуанкариане считают, что их Пуанкария неограниченна во все стороны. На-

зовем невидимые точки p -прямой ее *бесконечно удаленными точками*; для луча одной из его бесконечно удаленных точек будем считать точку ∞ (бесконечность). P -прямые однозначно определяются парой своих бесконечно удаленных точек (почему?); так мы их и будем различать и обозначать через $L(\alpha, \beta)$, где α, β — вещественные числа (одно из них может быть ∞) — координаты бесконечно удаленных точек на оси x -ов.

Попробуем вместе с пуанкариями построить геометрию их пространства. Как и нам, — при жизни в евклидовом пространстве, — некоторые утверждения кажутся пуанкарианам очевидными, они принимают их без доказательства (аксиомы) и выводят из них более сложные утверждения (теоремы). Для нас, смотрящих на Пуанкарию со стороны, все эти утверждения будут выглядеть иначе, чем для пуанкариан (например, p -прямые для нас полуокружности или лучи!), поэтому мы будем «переводить» формулировки пуанкариан на свой «прозаический» евклидов язык и доказывать по-своему.

Например, пуанкариане знают, что через две различные точки проходит p -прямая и притом единственная. Для нас же это означает, что через две различные точки полуплоскости проходит единственная полуокружность, перпендикулярная к оси x -ов, или вертикальный луч (докажите!); см. рисунок 2. Заметим, что физическое объяснение этого утверждения, состоящее в том, что свет между двумя точками распространяется по единственному пути — одно и то же и для пуанкариан, и для нас (впрочем, для геометрии это объяснение доказательной силы не имеет). Нетрудно убедиться, что в Пуанкарии справедливы все аксиомы евклидовой геометрии, касающиеся взаимного расположения точек и прямых и порядка точек на прямой. (Чтобы привыкнуть к Пуанкарии, разберитесь с p -отрезками, p -полуплоскостями, на которые p -прямая делит Пуанкарию

*). Можно было бы рассмотреть и «трехмерный» мир, но на плоскости проще рисовать картинки, и ради этого мы будем иметь дело с «плоскими» существами.

так, что p -отрезки, соединяющие точки в одной p -полуплоскости, не пересекают граничную p -прямую, а p -отрезки, соединяющие точки в разных p -полуплоскостях — ее пересекают; нарисуйте p -треугольники, p -многоугольники; подумайте о p -выпуклости, если вы знаете об «обычной» выпуклости. Вам помогут рисунки 3а и 3б.)

Отличие геометрии Пуанкари от евклидовой проявляется при рассмотрении взаимного расположения пары p -прямых. Мы уже знаем, что две различные p -прямые могут пересекаться не более чем в одной точке. Если же они не пересекаются, то они имеют общую бесконечно удаленную точку (невидимую!) или не

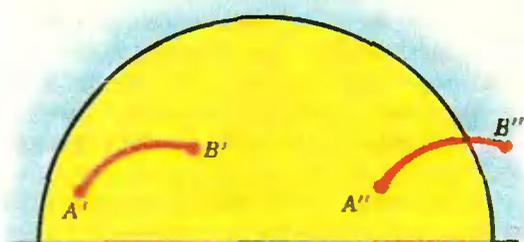


Рис. 3а.

имеют общих точек даже на невидимой границе. В первом случае мы будем называть такие p -прямые *параллелями*, а во втором — *сверхпараллелями*. Если имеется p -прямая $L(\alpha, \beta)$, то через точку вне ее проходят только две параллельные $L(\alpha, \beta)$ p -прямые (отвечающие бесконечно удаленным точкам α и β соответственно; рис. 4) и бесчисленное множество сверхпараллельных, лежащих между параллелями. Таким образом, в Пуанкарии несправедлива аксиома параллельных (нас, наблюдателей, впрочем, это не очень удивляет — ведь пуанкариане не знают, что их «прямые» — «не настоящие!»); это позволяет нам надеяться на то, что геометрия Пуанкари и окажется геометрией Лобачевского.

Главное, что теперь нам нужно сделать, — определить в Пуанкарии *расстояния и перемещения*.

Расстояния и перемещения

С точки зрения оптики естественнее всего в качестве расстояния между двумя точками A и B взять в Пуанкарии время, за которое свет доходит из точки A в точку B : тогда p -прямые будут кратчайшими линиями между лежащими на них точками. Из физических соображений следует, что определенное таким образом расстояние $\rho(A, B)$ обладает обычными свойствами евклидова расстояния:

- 1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;
- 2) если A, B, C лежат на одной p -пря-

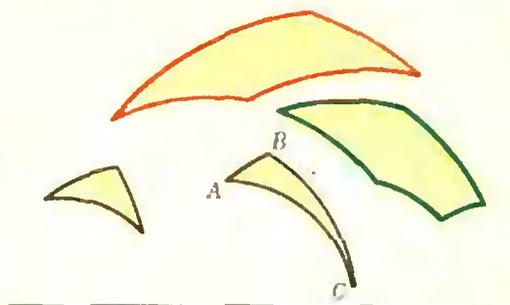


Рис. 3б.

мой и $B \in [AC]$, то $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$ (свет распространяется из A в C по p -прямой и пройдет через точку B);

3) для любых точек A, B, C : $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$ — *неравенство треугольника*, причем равенство имеет место лишь тогда, когда $B \in [AC]$ (если бы это неравенство не выполнялось, то свету на путь по p -ломаной ABC понадобилось бы меньше времени, чем на путь по p -прямой AC — *наибыстрейшему пути*, чего не может быть).

Для пуанкарии введенное расстояние ρ первично (заметим, что относительно этого расстояния свет распространяется с единичной скоростью), и у них нет причин выра-

жать ρ через что-то еще; нам же естественно выразить ρ через наше евклидово расстояние. Это не просто: приходится иметь дело с неравномерным движением света, и для вычисления времени, затраченного им, нужно считать интегралы. Поэтому приведем лишь окончательный ответ:

$$\rho(A, B) = \ln \frac{r' + r}{r' - r}, \quad (2)$$

где r — евклидово расстояние между точками A и B , r' — евклидово расстояние между точкой A и точкой B' , симметричной точке B относительно оси x -ов; логарифм берется по основанию e (при другом основании логарифма мы получим ρ с точностью до постоянного множителя). Евклидово расстояние замечательно тем, что име-

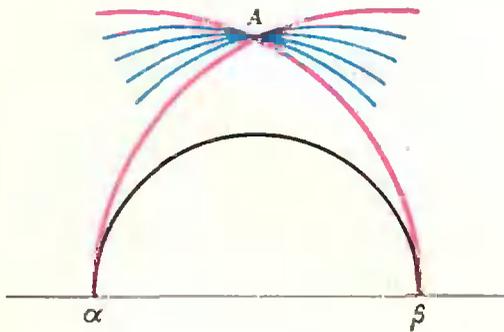


Рис. 4.

ется много преобразований плоскости, его сохраняющих; такие преобразования и называются *перемещениями*. Посмотрим, как выглядят перемещения в Пуанкари (п-перемещения) — преобразования, сохраняющие ρ , а значит, переводящие п-прямые в п-прямые.

Начнем с преобразований, не оставляющих ни одной точки на месте. Это прежде всего — обычные *параллельные переносы* вдоль оси x -ов: $T_a(x, y) = (x+a, y)$. Эти параллельные переносы сохраняют и евклидово расстояние, и скорость света $c(x, y) = c$, а потому и время, которое требуется свету на путь между двумя точками A и B , то есть п-расстояние $\rho(A, B)$, и, конечно, п-прямые пере-

водят в п-прямые. С другой стороны, *гомотетия* $F_b(x, y) = (bx, by)$, $b > 0$, пропорционально изменяя и евклидово расстояние, и величину скорости света $c(x, y)$, также не меняет времени, затраченного светом, то есть, п-расстояния $\rho(A, B)$. Итак, то, что нам представляется гомотетией (с центром на оси x -ов), пуанкаристам кажется перемещением. С помощью указанных п-перемещений можно любую точку перевести в любую. Например, точка (x_0, y_0) переходит в точку $(0, 1)$ при п-перемещении $\left(\frac{x-x_0}{y_0}, \frac{y}{y_0} \right)$. Относительно введенных п-перемещений — назовем их *п-сдвигами* — п-прямые распадаются на два класса: отдельно можно перевести друг в друга полуокружности, а отдельно — лучи (почему?).

Поясним сейчас, как, используя п-сдвиги и свойства введенного п-расстояния ρ , можно просто получить формулу (2), выражающую ρ через евклидовы расстояния, в том частном случае, когда обе точки A и B находятся на оси y -ов: $A = (0, y_1)$, $B = (0, y_2)$. Положим $\rho(A, B) = \varphi(y_1, y_2)$, и найдем вид функции φ . Поскольку ρ сохраняется при евклидовых гомотетиях с центром в точке O , то

$$\varphi(by_1, by_2) = \varphi(y_1, y_2). \quad (**)$$

Кроме того, если $C = (0, y_3)$ — третья точка на оси y -ов, то в силу сказанного выше

$$\varphi(y_1, y_2) + \varphi(y_2, y_3) = \varphi(y_1, y_3). \quad (***)$$

Согласно (*)

$$\varphi(y_1, y_2) = \psi(y_1/y_2) = \psi(z_1),$$

$$\varphi(y_2, y_3) = \psi(y_2/y_3) = \psi(z_2),$$

$$\varphi(y_1, y_3) = \psi(y_1/y_3) = \psi(z_3).$$

Учитывая соотношение (***) и последние три равенства, получим

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) + \psi(z_2),$$

откуда, в предположении, что функция ψ — достаточно «хорошая» (см. статью А. Л. о п-ица «Функциональные уравнения», «Квант», 1975, № 1), $\psi(z) = k \cdot \ln z$, где k — постоянный множитель, который вычисляется непосредственно.

Найденных п-перемещений еще недостаточно: у нас нет преобразований, с помощью которых мы могли бы п-прямые одного типа (полуокружности) перевести в п-прямые другого типа (лучи). Добавим для этого

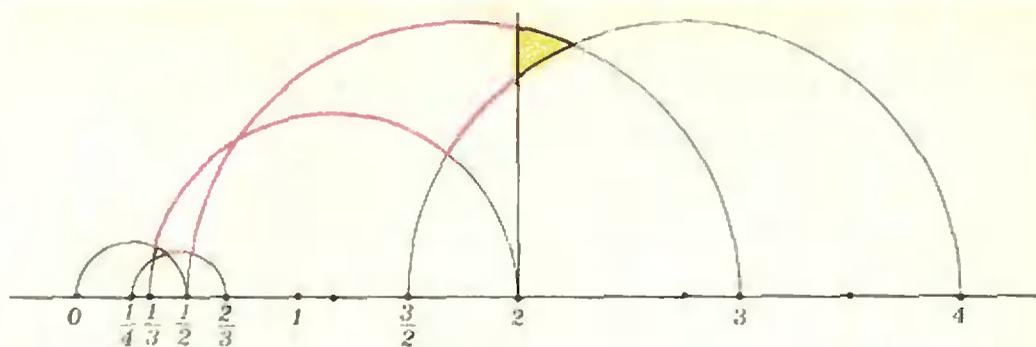


Рис. 5.

\mathbb{P} -симметрии относительно \mathbb{P} -прямых. Для лучей — это обычная *осевая симметрия*, а для полуокружностей — инверсия^{*}). (Например, \mathbb{P} -симметрия относительно \mathbb{P} -прямой $L(-1, 1)$ — это инверсия относительно окружности с центром $O=(0; 0)$ радиуса 1; она переводит точку A , отличную от центра O , в точку A' , лежащую на луче OA , такую, что $|OA| \cdot |OA'| = 1$). Мы знаем, что при инверсии окружности и прямые переходят в окружности или прямые, причем величины углов сохраняются. На языке Пуанкари это значит, что, например, при \mathbb{P} -симметрии относительно \mathbb{P} -прямой $L(-1, 1)$ \mathbb{P} -прямая $L(\alpha, \beta)$ переходит в \mathbb{P} -прямую $L\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$. В частности, \mathbb{P} -прямые $L(\alpha, 0)$, являющиеся при $\alpha \neq \infty$ полуокружностями, переходят в \mathbb{P} -прямые $L\left(\frac{1}{\alpha}, \infty\right)$, являющиеся лучами. Итак, \mathbb{P} -симметрии переводят Пуанкарию в себя, причем \mathbb{P} -прямые переходят в \mathbb{P} -прямые. Отдельно проверяется (мы эту проверку опускаем), что \mathbb{P} -симметрии не меняют \mathbb{P} -расстояния ρ . (Впрочем, в Пуанкарии всякое преобразование, переводящее \mathbb{P} -прямые в \mathbb{P} -прямые, сохраняет ρ (здесь нет гомотетий): в этом — важнейшее отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида.)

\mathbb{P} -перемещений, которые можно получить, комбинируя \mathbb{P} -сдвиги с \mathbb{P} -симметриями, уже хватает для того, чтобы любую \mathbb{P} -прямую перевести в любую \mathbb{P} -прямую; более того, при этом любую заданную точку первой \mathbb{P} -прямой можно совместить с заданной точкой второй, и любой \mathbb{P} -луч с другим \mathbb{P} -лучом (докажите!). Значит, этими \mathbb{P} -перемещениями можно совместить любые \mathbb{P} -отрезки равной \mathbb{P} -длины, и мы получаем, что такие отрезки \mathbb{P} -конгруэнтны. Можно показать, что все \mathbb{P} -перемещения сводятся к описанным.

При \mathbb{P} -перемещениях угол переходит в угол, равный ему в евклидовом смысле (поскольку это так для параллельных переносов, гомотетий, осевых симметрий и инверсий). Поэтому понятие конгруэнтности углов в Пуанкарии не отличается от евклидова. С учетом этого обстоятельства пуанкариане, точно так же как и мы, докажут два признака конгруэнтности треугольников: по двум сторонам и углу между ними и по стороне и двум прилежащим к ней углам. Сложнее обстоит дело с доказательством третьего признака конгруэнтности треугольников — по трем сторонам: ведь наше доказательство этого признака использует тот факт, что окружности пересекаются не более, чем в двух точках. К счастью, оказывается, что \mathbb{P} -окружности совпадают с евклидовыми (целиком лежащими в верхней полуплоскости), только \mathbb{P} -центр у них не совпадает с обычным (это — довольно неприятной

* См. статью А. Савина «Инверсия и окружность Аполлония», «Квант», 1971, № 8, или решение задачи М305, «Квант», 1975, № 9.

факт), а потому и с признаком конгруэнтности по трем сторонам в Пуанкарии все в порядке. Однако в Пуанкарии есть еще один признак конгруэнтности треугольников: *конгруэнтны треугольники с попарно конгруэнтными углами!* (Переведите это утверждение на язык евклидовой геометрии и попытайтесь доказать его; см. рисунок 5 и задачу 4.) Значит, площадь треугольника в Пуанкарии (как и сам треугольник) определяется величинами его углов α , β и γ . В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше π . Величина $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ называется *дефектом треугольника*. Можно заметить, что дефект треугольника ведет себя так же, как площадь: точнее: если данный треугольник разрезать прямой, проходящей через его вершину, то площадь его будет равна сумме площадей полученных треугольников; то же будет справедливо и для дефекта всякого треугольника: он равен сумме дефектов образовавшихся треугольничков (рис. 6). Отсюда можно вывести, что величина площади треугольника в геометрии Лобачевского пропорциональна дефекту $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

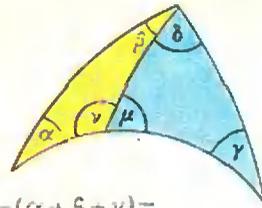
Несколько задач

1. а) Убедитесь, что все n -прямые, перпендикулярные к фиксированной n -прямой, сверхпараллельны (рис. 7). б) Покажите, что для пары сверхпараллелей существует единственный общий n -перпендикуляр (рисунки 8, а и б).

2. Проверьте, что n -биссектрисы n -треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной n -окружности. Подумайте, что можно сказать об описанной n -окружности — всегда ли она существует (см. рисунок 9: на этом рисунке n -треугольники $A_i B C_i$ — равнобедренные, с осью симметрии $L(0, \infty)$; $i = 1, 2, 3$; синим цветом изображены перпендикуляры к n -серединам сторон этих треугольников)?

3. Убедитесь, что у тупоугольного (но не остроугольного) n -треугольника высоты могут быть сверхпараллельны (на рис. 10: стороны треугольника показаны синим цветом, а его высоты — красным). Что можно сказать о медианах?

4. Покажите, что у равнобедренного n -треугольника углы при основании равны,



$$\begin{aligned} \pi - (\alpha + \beta + \gamma) &= \\ &= [\pi - (\alpha + \beta + \nu)] + \pi - (\mu + \delta + \gamma) \end{aligned}$$

Рис. 6.

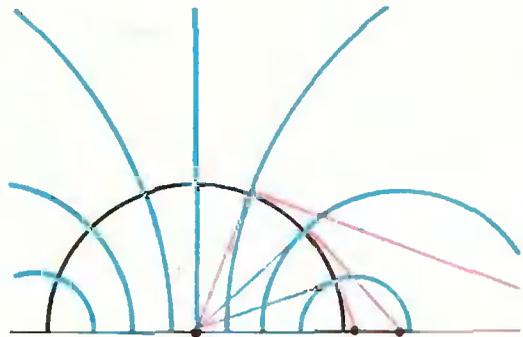


Рис. 7.

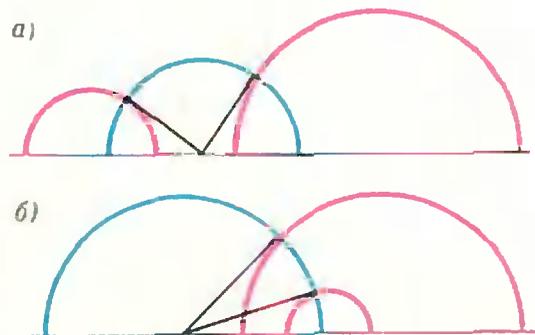


Рис. 8.

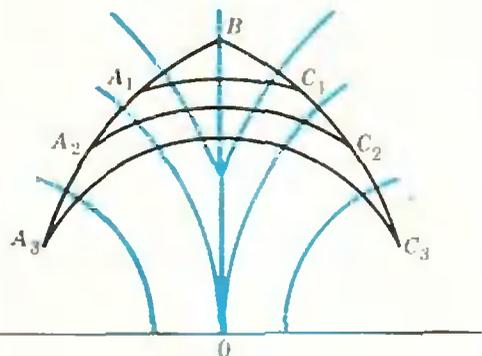


Рис. 9.

я биссектриса угла при вершине является медианой и высотой. Докажите для этого случая четвертый признак π -конгруэнтности треугольников.

5. Пусть $L(\alpha, \beta)$, $L(\alpha, \beta_1)$, $L(\alpha, \beta_2)$ — три параллельные π -прямые (рис. 11). Докажите, что существует π -перемещение, переводящее $L(\alpha, \beta)$ в себя, а $L(\alpha, \beta_1)$ — в $L(\alpha, \beta_2)$.

Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нельзя определить расстояние между параллелями.

6. Если π -прямая L_1 пересекает π -прямую L_0 или сверхпараллельна ей, то она проектируется на L_0 в виде конечного π -интервала; если же L_1 параллельна L_0 , то проекцией является π -луч.

7. Пусть π -прямая L_0 перпендикулярна к L_1 и пусть A — точка на L_0 , отстоящая от L_1 на расстояние x (рис. 12). Проведем через точку A π -прямую M_x , параллельную L_1 , и обозначим через $\varphi(x)$ величину угла, который π -прямая $M(x)$ образует с L_0 . Найдите

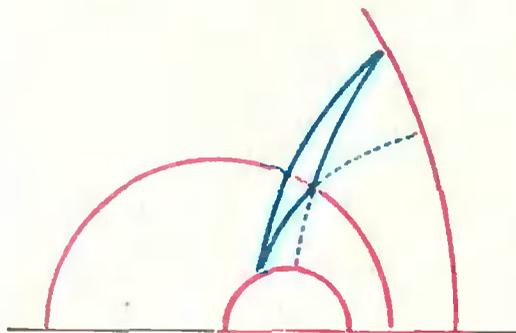


Рис. 10.

$\varphi(x)$ и покажите, что $\varphi(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow 0$ и $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Функция $\varphi(x)$ называется *функцией Лобачевского*; эта функция связывает величины углов и длины, и поскольку для углов существует абсолютная единица измерения — полный угол, то в геометрии Лобачевского есть такая абсолютная единица измерения и для длины (она с помощью функции φ переносится с углов). В геометрии Евклида $\varphi(x) \equiv \frac{\pi}{2}$, а потому аналогичной абсолютной единицы измерения длины нет.

Твердые тела в Пуанкари

Пока во всех наших геометрических рассуждениях мы руководствовались только оптическими предпосылками. Здесь нужно подчеркнуть, что геометрия Пуанкаре получилась не-

евклидовой не из-за того, что в Пуанкарии иные законы оптики, чем наши: мы строим (*моделируем*) Пуанкарию в нашем собственном мире и законов физики не меняем! Оптические же иллюзии пуанкария объясняются оптической неоднородностью их мира.

Хотя, безусловно, самой яркой реализацией прямой линии является световой луч, мы все же не измеряем длину при помощи времени распространения света — для этих целей у нас есть линейка. Вероятно, стоит обзавестись линейкой и пуанкария. Конечно же, пуанкарияне изготовят линейку « π -прямой»; но если пуанкариянин перенесет такую ли-

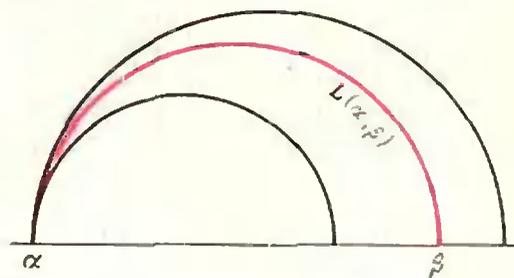


Рис. 11.

нейку из одного места в другое, то она «прямой» (π -прямой) ему уже не покажется. С точки зрения пуанкариянина при движении твердого тела меняется его форма. Как же пуанкариянин должен реагировать на это? Ясно, что нужно как-то увязать понятие твердого тела с геометрией Пуанкарии, иначе пуанкариянам придется поверить в существование сверхъестественных сил. Анри Пуанкаре придумал остроумный выход из этого, казалось бы, безнадежного положения: он воспользовался явлением *теплового расширения тел*.

Пусть в Пуанкарии у всех тел одинаковый коэффициент теплового расширения и нулевая теплопроводность, а размеры тел пропорциональны абсолютной температуре T . (За-

метим, что в этих условиях при помощи обычного термометра пуанкаряне не могут измерить температуру, поскольку такое измерение предполагает сравнение расширения тел с разными коэффициентами теплового расширения.) Твердое тело характеризуется тем, что при движении в среде с постоянной температурой расстояние r (A, B) (евклидово) между любыми двумя его точками A и B сохраняется. Но если тело переместится из области с температурой T_1 в область с температурой T_2 , то расстояние между его точками умножится на T_2/T_1 , другими словами, останется прежним отношение $r(A, B)/T$. А что будет, если тело сразу окажется в области с разными температурами?

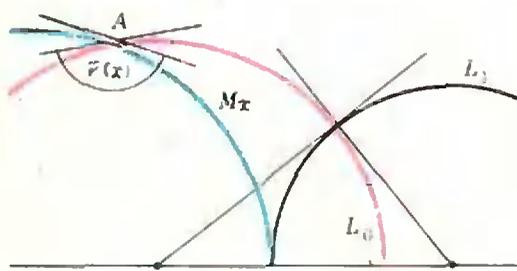


Рис. 12.

Какая величина будет сохраняться в этих условиях? Пусть, например, достаточно большое твердое тело перемещается в среде, где по одну сторону от некоторой прямой m температура T_1 , а по другую — T_2 ; пусть A — точка тела, находящаяся в области с температурой T_1 , а B — точка тела, находящаяся в области с температурой T_2 . Возьмем ломаную с концами в точках A и B и вершиной C на прямой m . Обозначим $|AC| = r_1$, $|CB| = r_2$ и рассмотрим величину $r_1/T_1 + r_2/T_2$. Оказывается, что при движении в такой температурной среде сохраняется наименьшее значение величины $r_1/T_1 + r_2/T_2$, взятое по всем ломаным с вершинами на прямой m и с концами в двух данных точках A и B ! Далее можно в точности пов-

торить те же рассуждения, что и при применении принципа Ферма, например, к выводу закона преломления Снеддиуса, и мы получим, что искомое наименьшее значение будет отвечать ломаной, для которой $\frac{\sin \alpha_1}{T_1} = \frac{\sin \alpha_2}{T_2}$,

где α_i — угол соответствующего звена ломаной с нормалью к прямой m .

Пусть теперь в Пуанкарии в точке (x, y) постоянно поддерживается абсолютная температура $T(x, y) = y$. Тогда за счет выбранного температурного режима при движении твердых (в нашем смысле!) тел будут сохраняться уже не евклидовы расстояния, а p -расстояния, и с точки зрения пуанкарян (ведь они не чувствуют разницы температур!) размер тела, движущегося в такой среде, сохраняется, то есть оно — p -твердое. Осталось позаботиться лишь о том, чтобы все предметы имели малые теплоемкости и перемещались настолько медленно, чтобы находиться в тепловом равновесии, и чтобы изменение температуры было для пуанкарян незаметно. В результате пуанкаряне не только не увидят границы мира, но и не смогут никогда добраться до нее: при приближении к границе температура стремится к абсолютному нулю, а потому будут стремиться к нулю и размеры предметов, без изменения пропорций между предметами. Априори Пуанкаре старался исключить для пуанкарян все возможности узнать, что их неевклидов мир всего лишь сконструирован в нашем евклидовом. Но все ли он предусмотрел? Если вы обнаружите какие-либо неучтенные возможности пуанкарян, напишите нам об этом.

А. Ширшов

Модель Кэли-Клейна геометрии Лобачевского



В этой статье рассматривается модель плоскости Лобачевского, отличная от модели Анри Пуанкаре, о которой рассказано в статье С. Гиндикина «Волшебный мир Анри Пуанкаре».

Определение «плоскости»

В геометрии Евклида мы имеем дело с точками и прямыми обычной плоскости, и с помощью всем известных перемещений (параллельных переносов, осевых и центральных симметрий и поворотов) можем любую точку плоскости перевести в любую другую, любые две точки, лежащие на заданном расстоянии, перевести в другие две точки, лежащие на таком же расстоянии, и любые две прямые перевести в две прямые, образующие такой же угол. Сейчас же мы рассмотрим геометрию, *точками* которой будут внутренние точки некоторого круга (без точек ограничивающей его окружности), а *прямыми* — всевозможные хорды этого круга (без концов); опишем все *перемещения* такой «плоскости», и затем введем *расстояния* между «точками» и *углы* между «прямыми» так, чтобы они сохранялись при указанных перемещениях.

Можно проверить, что геометрия, которую мы построим, «ничем не хуже» евклидовой: в ней будут выполнены все аксиомы, кроме «аксиомы параллельных»: легко видеть, что теперь через «точку» вне «прямой» можно провести более одной, ее «не пересекающей». На рисунке 1 через точку *A*, не лежащую на хорде *L*, проведены две хорды — *L*₁ и *L*₂, имеющие с *L* по общему концу; эти хорды *L*₁ и *L*₂ называются *параллельными L*, поскольку мы рассматриваем как прямые хорды без концов, и с нашей новой точки зрения прямая *L* не пересекается ни с *L*₁, ни с *L*₂. (Отметим также, что прямые, «не пересекающиеся» с *L*, расположены в области, ограниченной прямыми *L*₁ и *L*₂, закрашенной синим, а прямые, пересекающиеся с *L* — в незакрашенной области.) Значит, «новая»

геометрия будет ничем иным, как *геометрией Лобачевского*. Эта модель геометрии Лобачевского называется *моделью Кэли — Клейна*; о ней уже упоминалось в статьях С. Гиндикина «Волшебный мир Анри Пуанкаре» (см. с. 9) и «Феликс Клейн» (см. «Квант» № 12 за 1975 год).

Определение перемещений

Нам понадобится результат задачи М305а), решение которой было опубликовано в «Кванте» № 9 за 1975 год (с. 35).

Пусть хорды AA' и BB' нашего круга пересекаются в точке P , не лежащей на окружности (рис. 2). Рассмотрим хорды AB и $A'B'$ и проведем через точку P прямую, пересекающую эти хорды в точках C и C' соответственно. Пусть, далее, $|AP| \cdot |A'P| = t$, $|AC| \cdot |CB| = s$, $|CP| = q$, $|C'P| = q'$.

Тогда, как это следует из решения задачи М305а), $q' = \frac{qt}{s + q^2}$. Если теперь через точку C провести произвольную хорду A_1B_1 и построить проходящие через точку P хорды $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, то хорда $A'_1B'_1$ пройдет через точку C' , ибо величины q , t , s не изменятся.

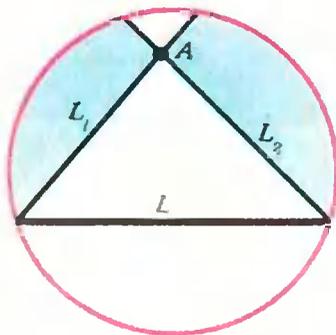


Рис. 1.

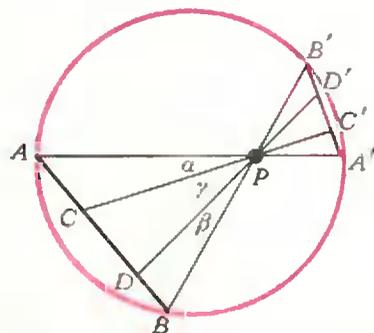


Рис. 2.

Итак, с любой точкой P , не лежащей на окружности, мы можем связать некоторое *отображение* φ_P нашего круга на себя: нужно через точку C круга провести произвольную хорду AB , построить хорду $A'B'$, соответствующую хорде AB относительно выбранной точки P , и образом точки C считать точку C' пересечения прямой CP с хордой $A'B'$ (образом точки C мы называем точку C' , в которую переходит точка C при отображении φ_P : $C' = \varphi_P(C)$; отображение φ_P можно корректно доопределить для точек, лежащих на окружности; подумайте, как).

Из сказанного следует, что положение точки C' не зависит от выбора хорды AB . Назовем отображение φ_P *элементарным перемещением* первого или второго рода, в зависимости от того, внутри или вне круга находится точка P .

Причислим к элементарным перемещениям второго рода также отображения, являющиеся осевыми симметриями относительно любого диаметра d нашего круга: обозначим эти отображения через φ_d .

З а м е ч а н и е. Элементарное перемещение φ_P первого рода оставляет неподвижной единственную точку P , а элементарное перемещение второго рода оставляет неподвижными все точки хорды, соединяющей точки касания двух касательных к окружности, проведенных из точки P .

Будем теперь считать перемещением любое отображение, получающееся в результате последовательного выполнения нескольких элементарных перемещений.

Элементарные перемещения, а значит, и перемещения, все точки какой-либо хорды переводят в точки некоторой хорды, и образ пересечения двух хорд при каком-либо перемещении совпадает с пересечением образов этих хорд.

Наши перемещения переводят прямые в прямые, причем любая точка первой прямой может быть переведена в любую точку второй (проверьте это).

Задача 1. В окружность вписана равнобокая трапеция, боковые стороны которой пересекаются в точке P , а диагонали — в точке Q ; d — диаметр, лежащий на прямой PQ . Докажите, что $\varphi_Q = \varphi_P \varphi_Q = \varphi_Q \varphi_P$ ($\varphi_M \varphi_N$ означает последовательное выполнение перемещений φ_M и φ_N).

Теперь нужно определить «расстояния» между точками нашего круга и «углы» между прямыми так, чтобы они сохранялись при описанных перемещениях.

Расстояния и углы

Пусть C и D — две точки нашего круга. Проведем через них «прямую» — хорду AB , соединим точки A, C, D и B с некоторой точкой P , не лежащей на окружности, и обозначим углы, образовавшиеся при точке P , через α , γ и β (см. рис. 2). Рассмотрим отношение $\frac{|AD| \cdot |BC|}{|AC| \cdot |BD|}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{|AD| \cdot |BC|}{|AC| \cdot |BD|} &= \frac{S_{APD} \cdot S_{PBC}}{S_{PAC} \cdot S_{PDB}} = \frac{|AP| \cdot |PD| \sin(\alpha + \gamma) \cdot |PC| \cdot |PB| \sin(\beta + \gamma)}{|AP| \cdot |PC| \sin \alpha \cdot |PD| \cdot |PB| \sin \beta} = \\ &= \frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}. \quad (1) \end{aligned}$$

(Здесь S_{XYZ} — обычная площадь треугольника XYZ .)

Понятно, что если C' и D' — образы точек C и D при элементарных перемещениях φ_P (или φ_Q), то

$$\frac{|A'D'| \cdot |B'C'|}{|A'C'| \cdot |B'D'|} = \frac{|AD| \cdot |BC|}{|AC| \cdot |BD|}$$

(поскольку углы α , β и γ не меняют своей величины), и, следовательно, элементарные перемещения, а значит, и перемещения вообще, сохраняют это отношение.

Определим «расстояние» между любыми двумя точками C и D так:

$$\rho(C, D) = \log_q \frac{|AD| \cdot |BC|}{|AC| \cdot |BD|},$$

где $q > 1$ — некоторое фиксированное число.

Важное замечание. При определении расстояния существен порядок точек на прямой AB , именно: если мы ищем расстояние $\rho(C, D)$, то точка A — соседняя с C точка, а точка B — соседняя с D точка; если же мы ищем $\rho(D, C)$, то A — соседняя с D точка (соответственно B — соседняя с C точка).

Для обычного расстояния между точками C и D мы сохраним обозначение $|CD|$. Из формулы (1) следует, что $\rho(C, D) \geq 0$, причем $\rho(C, D) = 0$ лишь в том случае, когда точки C и D совпадают (то есть $\gamma = 0$). Кроме того, $\rho(C, D) = \rho(D, C)$. Если же есть три точки, C, D и E , лежащие на одной прямой, причем точка D находится между точками C и E , то

$$\rho(C, D) + \rho(D, E) = \rho(C, E)$$

(проверьте оба утверждения).

Задача 2. Докажите, что для произвольных трех точек A , B и C выполняется «неравенство треугольника»:

$$\rho(A, C) + \rho(B, C) \geq \rho(A, B).$$

Таким образом, расстояние ρ ведет себя как и обычное.

Задача 3. Докажите, что для любой прямой AB , любой точки C на ней и любого положительного числа l можно указать ровно две такие различные точки D и D_1 на прямой AB , что $\rho(C, D) = \rho(C, D_1) = l$. Другими словами, докажите, что от точки можно отложить отрезок любой длины.

Две фигуры (например, треугольники, отрезки, углы) мы будем называть **конгруэнтными**, если найдется перемещение, переводящее одну из них в другую.

Из того, что при перемещениях сохраняется расстояние, следует, что конгруэнтные отрезки имеют равную длину.

Задача 4. Докажите существование и единственность середины отрезка.

Задача 5. Докажите, что отрезки, имеющие одинаковую длину, конгруэнтны. Осталось ввести величину угла.

Пусть есть некоторый угол с вершиной в точке C , — угол C . Возьмем любое перемещение, переводящее точку C в центр данного круга, и положим величину угла C равной евклидовой величине угла (с вершиной в центре круга), в который угол C переходит при этом перемещении. Из дальнейшего будет следовать, что эта величина не зависит от выбора перемещения. (Попытайтесь получить это самостоятельно, доказав, что повороты вокруг центра нашего круга являются перемещениями и в геометрии Лобачевского.)

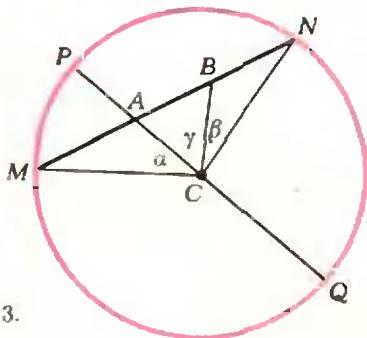


Рис. 3.

Теорема косинусов

Введем такие обозначения: если l — некоторый отрезок, то $|l|$ — его обычная (евклидова) длина, $\{l\}$ — его дли-

на в новом смысле, а $[l] = \frac{q^{\{l\}} - 1}{q^{\{l\}} + 1}$ ($q > 1$ — основание логарифма в определении расстояния ρ). Заметим, что величина $[l]$ всегда меньше единицы (но больше нуля).

Рассмотрим треугольник ABC , у которого вершина C совпадает с центром круга. Пусть $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, и r — радиус круга. Продолжим сторону AB до пересечения с окружностью в точках M и N , соединим точки M и N с вершиной C (рис. 3) и обозначим образовавшиеся углы через α , γ и β (γ — угол при вершине C треугольника ABC).

Тогда $\widehat{MNC} = \widehat{NMC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$, и по обычной теореме синусов находим:

$$\frac{|a|}{r} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}}, \quad (2)$$

$$\frac{|b|}{r} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}}{\cos \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2}}. \quad (3)$$

Далее:

$$\{a\} = \log_a \frac{r \cdot (r + |a|)}{r \cdot (r - |a|)} = \log_a \frac{r + |a|}{r - |a|},$$

и поэтому

$$[a] = \frac{|a|}{r}. \quad (4)$$

Аналогично,

$$[b] = \frac{|b|}{r}. \quad (5)$$

В силу формулы (1)

$$\{c\} = \log_a \frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta},$$

значит,

$$[c] = \frac{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\beta + \gamma) - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin(\beta + \gamma) + \sin \alpha \cdot \sin \beta}. \quad (6)$$

Из соотношений (4) — (6), с учетом (2) и (3), несложными, но довольно громоздкими вычислениями получаем, что

$$\frac{(1 - [a]^2)(1 - [b]^2)}{1 - [c]^2} = (1 - [a] \cdot [b] \cdot \cos \gamma)^2. \quad (7)$$

Соотношение (7) является аналогом теоремы косинусов обычной геометрии. Так как при перемещениях величины $\{a\}$, $\{b\}$ и $\{c\}$, а следовательно, и $[a]$, $[b]$, $[c]$, не меняются, то этим соотношением оправдывается определение величины угла, данное в предыдущем пункте.

Докажем теперь два замечательных утверждения геометрии Лобачевского.

Две теоремы

Теорема 1. Сумма углов любого треугольника меньше π .

Доказательство. Рассмотрим вначале прямоугольный треугольник ABC , с прямым углом при вершине C : $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$ (рис. 4). Из теоремы косинусов следует, что

$$(1 - [a]^2)(1 - [b]^2) = 1 - [c]^2, \quad (8)$$

или

$$[c]^2 = [a]^2 + [b]^2 - [a]^2 \cdot [b]^2.$$

Далее, из этой же теоремы (см. рис. 4)

$$\frac{(1 - [a]^2)(1 - [c]^2)}{1 - [b]^2} = (1 - [a] \cdot [c] \cos \beta)^2;$$

подставив сюда выражение (8) для $1 - [c]^2$, получим

$$\frac{(1 - [a]^2)^2(1 - [b]^2)}{1 - [b]^2} = (1 - [a] \cdot [c] \cos \beta)^2,$$

откуда

$$1 - [a]^2 = 1 - [a] \cdot [c] \cdot \cos \beta,$$

и

$$\cos \beta = \frac{[a]}{[c]}, \text{ то есть } \beta = \arccos \frac{[a]}{[c]}.$$

Аналогично, $\alpha = \arccos \frac{|b|}{|c|}$, и мы получаем, что

$$\alpha + \beta = \arccos \frac{|a|}{|c|} + \arccos \frac{|b|}{|c|} = \arccos \frac{|a| \cdot |b| - \sqrt{([c]^2 - [a]^2)([c]^2 - [b]^2)}}{|c|^2}.$$

Поскольку $[c]^2 = [a]^2 + [b]^2 - [a]^2 \cdot [b]^2$, то выражение, стоящее под знаком последнего арккосинуса, можно преобразовать в такое:

$$\frac{|a| \cdot |b| - \sqrt{([a]^2 - [a]^2 \cdot [b]^2)([b]^2 - [a]^2 [b]^2)}}{|c|^2} = \frac{|a| \cdot |b|}{|c|^2} (1 - \sqrt{(1 - [a]^2)(1 - [b]^2)}).$$

и так как $0 < [a] < 1$ и $0 < [b] < 1$ (см. ранее сделанное замечание), то последнее выражение положительно; значит арккосинус от него строго меньше $\frac{\pi}{2}$, и мы получаем, что $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, то есть

$$\alpha + \beta + \hat{C} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Случай прямоугольного треугольника разобран.

Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC и предположим, что $[c]$ — самая длинная его сторона. Опустим из точки C на сторону AB

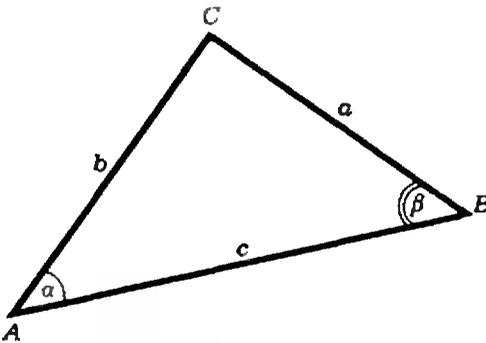


Рис. 4.

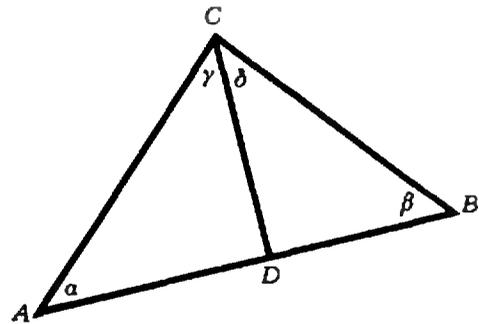


Рис. 5.

перпендикуляр CD . Он разбивает наш треугольник ABC на два прямоугольных: треугольник ACD с «острыми» углами α и γ и треугольник BCD — с углами δ и β (рис. 5). По доказанному, $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\beta + \delta < \frac{\pi}{2}$, откуда сумма углов треугольника ABC : $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ — меньше π .

Пусть читателя не смущает выражение «опустим перпендикуляр». Легко проверить, что факты, использованные нами при доказательстве теоремы 1, не опираются на аксиому параллельности, и при желании их все можно доказать, как и в обычной геометрии.

Теорема 2. Четвертый признак конгруэнтности треугольников. Если углы одного треугольника соответственно конгруэнтны углам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

Доказательство. Обозначим величины $[a]$, $[b]$ и $[c]$ для треугольника ABC через x , y и z ; косинусы углов, соответственно лежащих против сторон a , b и c , — через m , n и p . Получим, используя теорему косинусов (7), систему трех уравнений с тремя неизвестными x , y и z :

$$\begin{cases} (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-my z) = (1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}; \\ (1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-nxz) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}; \\ (1-z^2)^{\frac{1}{2}}(1-pxy) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

(значения m , n и p нам заданы, так как величины углов известны).

Эта система имеет единственное положительное решение:

$$x = \frac{D}{nr + m}, \quad y = \frac{D}{mp + n}, \quad z = \frac{D}{mi + p},$$

где

$$D^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2mnp - 1 \text{ (проверьте!)}$$

Следовательно, задание углов однозначно определяет стороны треугольника, и теорема 2 доказана.

Площади. Приложение

Мы не имеем возможности подробно говорить о теории площадей в геометрии Лобачевского. Поэтому ограничимся лишь краткими замечаниями. Допустим, что к каждому многоугольнику T , не обязательно выуклому (но без самопересечения), поставлено в соответствие некоторое положительное число $S(T)$, причем:

1) если многоугольник T разбит на некоторые многоугольники T_1, T_2, \dots, T_k , то $S(T) = S(T_1) + S(T_2) + \dots + S(T_k)$;

2) если многоугольники T_1 и T_2 конгруэнтны, то $S(T_1) = S(T_2)$. Тогда будем говорить, что $S(T)$ — площадь многоугольника T .

Предоставляем читателям доказать или убедиться на простых примерах, что в плоскости Лобачевского в качестве площади n -угольника T может быть взята величина

$$S(T) = \lambda [(n-2)\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)],$$

где λ — произвольное фиксированное положительное число (коэффициент пропорциональности), n — число сторон, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — внутренние углы многоугольника.

Указание. Заметьте, что величина $(n-2)\pi$ — это сумма внутренних углов n -угольника T в геометрии Евклида, то есть, что величина $S(T)$ пропорциональна отношению сумм углов многоугольника в евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского; попробуйте доказать сформулированное утверждение для треугольников. Вам поможет статья «Волшебный мир Анри Пуанкаре».

Площади криволинейных фигур (например, площадь круга) вычисляются, как и обычно, с помощью предельного перехода. Докажите, например, что площадь круга радиуса R равна

$$\lambda \pi \left(\frac{R}{q} - q - \frac{R}{q} \right)^2.$$

И в заключение отметим следующее обстоятельство. Все выше изложенные результаты могут служить источником многих задач обычной геометрии, а также использоваться при решении задач.

Поясним это на примере.

Через точку P , лежащую на диаметре AB (рис. 6), проведены хорды MM' и NN' . Нужно доказать, что хорда TT' , перпендикулярная к диаметру и проходящая через точку P , пересекется хордами MN и $M'N'$ в точках S и S' , равноудаленных от точки P .

Решение. Перемещение φ_P переводит хорду MN в хорду $M'N'$, а хорду TT' переводит в себя. Поэтому точка S переходит в точку S' и $\rho(P, S) = \rho(P, S')$, то есть

$$\frac{|TP| \cdot |TS|}{|TS'| \cdot |T'P|} = \frac{|T'P| \cdot |TS'|}{|TP| \cdot |T'S|}, \quad \text{и } |TP| = |T'P|;$$

из этого следует, что $|SP| = |S'P|$.

Задача 6. Докажите аналогичное утверждение для случая, когда точка P лежит на продолжении диаметра AB .

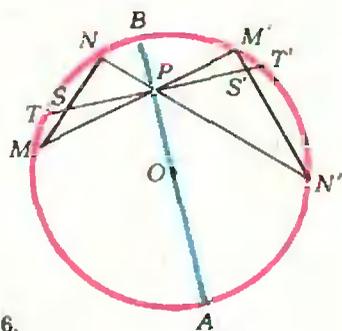
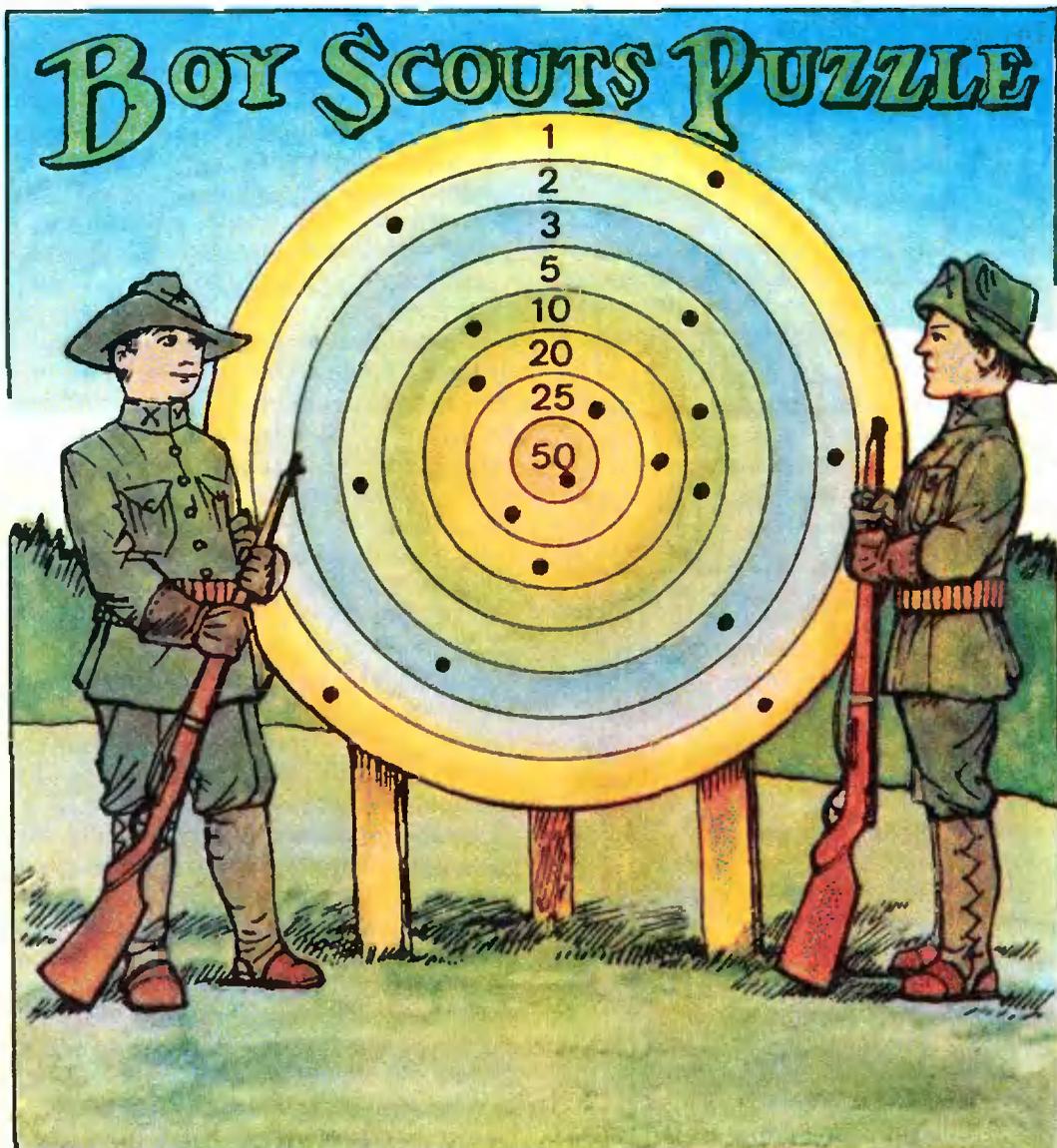


Рис. 6.

Головоломка Сэма Лойда

Сэм Лойд (1841—1911) — на редкость изобретательный американский конструктор головоломок.

Многие его головоломки, если их несколько иначе сформулировать, превращаются в проблемные математические задачи, допускают обобщение, наталкивают на новые задачи. Но у Лойда задачи даются в занимательной игровой форме. Лойд опубликовал тысячи занимательных задач (не только математических, но также лингвистических и шахматных). Он сам делал рисунки к задачам, более того, иногда сам набирал и печатал свои произведения. Головоломка, которую мы здесь помещаем, публиковалась в книге «Sam Loyd's Puzzles», вышедшей в Филадельфии, в 1912 году.

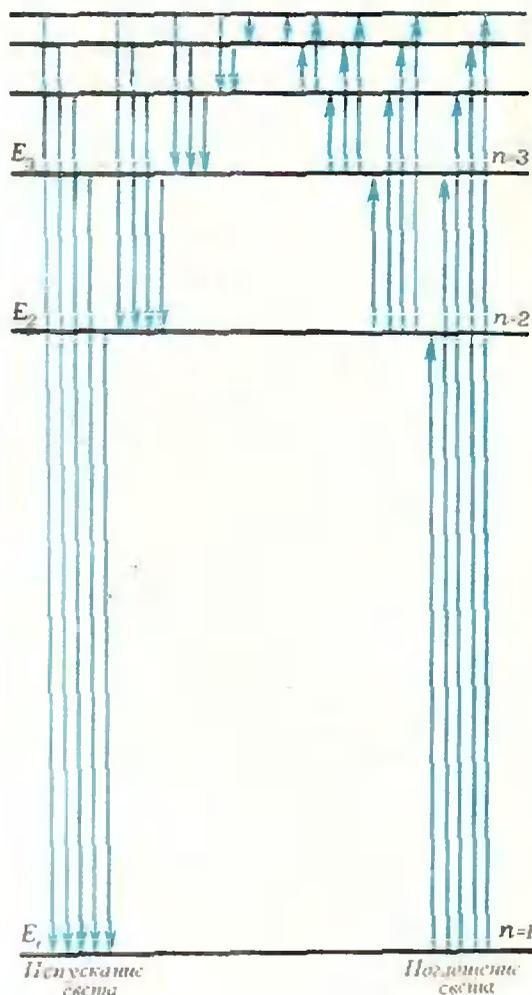


При осмотре этой мишени спор разгорелся лишь о том, кто из стрелявших поразил центр: было известно, что все трое произве-

ли по шесть выстрелов и набрали по 71 очку. Сможете ли вы указать три набора из шести чисел, содержащих по 71 очку?

М. Волькенштейн

Квантование и стоячие волны



Квантовая механика — это наука о законах движения микрочастиц (атомов, электронов, нейтронов и т. п.). Это — физика микромира. Она объясняет множество важнейших явлений — и радиоактивный распад, и электропроводность металлов, и природу химической связи. Но прежде всего квантовая механика объяснила линейчатые спектры атомов — ответила на вопрос о том, почему атомы способны испускать или поглощать свет лишь со строго определенных частотами колебаний световой волны. Квантовая механика показала, что электроны в атомах могут обладать только фиксированными, прерывными значениями энергии. Физики обычно говорят, что электроны располагаются на дискретных уровнях энергии E_1, E_2, \dots — энергия электрона в атоме квантована. Поглощение или испускание света атомом происходит при переходе электрона с одного уровня энергии на другой. В первом случае электрон переходит с уровня с меньшей энергией на уровень с большей энергией, во втором случае — наоборот. Частота испускаемой (или поглощаемой) световой волны определяется условием частот Бора.

$$\nu_{\text{ли}} = \frac{E_n - E_{n'}}{h} \quad (1)$$

где $E_n, E_{n'}$ — уровни энергии, n, n' — значения квантового числа, характеризующего эти уровни.

Одна из главных задач квантовой механики состоит в нахождении квантованных значений энергии для данной системы частиц, в частности, для атома. Согласно уравнению (1) решение такой задачи означает одновременно и расчет спектра системы, то есть определение набора частот света, испускаемого этой системой. Строгое решение этой задачи сводится к решению основного уравнения квантовой механики, так называемого уравнения Шредингера. Это — дифференциальное уравнение в частных про-

изводных второго порядка, и школьник, разумеется, не может его решить. Однако ряд интересных результатов, относящихся к квантованию энергии, можно получить, не решая уравнения Шредингера, исходя из довольно простых соображений.

События, происходящие в микромире, стали объяснимыми лишь после того, как появилась идея о волновой природе микрочастиц. Эту идею впервые высказал де Бройль. Он предположил, что наряду с корпускулярными свойствами материальные частицы обладают волновыми свойствами и между ними существует однозначная связь. Частице, движущейся со скоростью v и обладающей импульсом $p = mv$, соответствует волно-

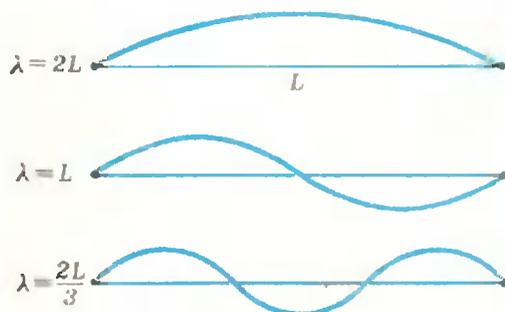


Рис. 1.

вой процесс, который характеризуется длиной волны, равной

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (2)$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ дж/сек — постоянная Планка. Многочисленные эксперименты подтверждали справедливость гипотезы де Бройля, и их результаты прекрасно совпали с теоретическими данными, полученными с использованием формулы (2).

Именно волновые свойства электронов приводят к дискретным значениям энергии атомов. Для того чтобы пояснить, как это происходит, воспользуемся механической аналогией — колебаниями струны с закрепленными концами.

При возбуждении струны с закрепленными концами на ней устанавливаются стоячие волны. При этом между концами струны может уложиться лишь целое число полуволн. Если длина струны L , то возможные длины стоячих волн находят-ся из условия

$$n \frac{\lambda}{2} = L,$$

или

$$\lambda_n = \frac{2L}{n},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ (рис. 1).

Попытаемся при помощи модели стоячих волн на струне найти условия квантования для нескольких задач квантовой механики.

Электрон

«в потенциальном ящике»

Допустим, что электрон может свободно двигаться вдоль отрезка длиной L без действия каких-либо сил. Иными словами, потенциальная энергия электрона в этом интервале равна нулю. А на границах отрезка потенциальная энергия электрона возрастает до бесконечности. Электрон ведет себя так, как вело бы себя тяжелое тело, имеющее возможность свободно двигаться по дну ящика с бесконечно высокими вертикальными стенками, упруго отражаясь от его стенок. Спрашивается, каковы возможные значения энергии электрона?

Если у струны закреплены концы, то на них обязательно располагаются узлы стоячей волны, которая не распространяется за пределы струны. Подобно этому тяжелое тело в ящике не может выйти за его пределы, так как это требует бесконечно большой энергии. Электрону, движущемуся в «ящике» со скоростью v , соответствует волна де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv}$. По-

скольку электрон не может выйти за пределы отрезка L (он упруго отражается от стенок «ящика»), то и волна де Бройля должна отражаться от

стенок ящика. Поэтому волновую картину, соответствующую движению электрона, можно представить как установившиеся стоячие волны де Бройля. Узлы должны располагаться на концах отрезка L , а на самом отрезке должно укладываться целое число полуволин (рис. 2), то есть должно выполняться условие

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Отсюда следует, что скорость электрона внутри ящика квантована:

$$v_n = \frac{h}{m\lambda_n} = \frac{nh}{2mL} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Соответственно квантована и его кинетическая энергия. Внутри ящика потенциальная энергия электрона равна нулю и, значит, полная

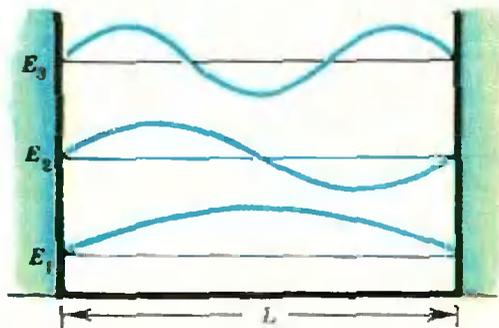


Рис. 2.

энергия совпадает с кинетической:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Подставляя сюда возможные значения скорости (3), находим

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \quad (4)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

На первый взгляд этот результат кажется неожиданным. Он означает, что и энергия тяжелого тела, движущегося в ящике с бесконечно высокими стенками, должна быть квантована. Однако даже для очень малой частицы квантование становится заметным лишь в том случае, когда «ящик» имеет размеры порядка атомных. Действительно, для электрона,

масса которого $m = 9,8 \cdot 10^{-28}$ г, помещенного в ящик длиной $L = 1$ см, возможны значения энергии

$$E_n = n^2 \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9,8 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-4}} \approx \\ \approx n^2 \cdot 5,6 \cdot 10^{-34} \text{ дж} = n^2 \cdot 3,5 \cdot 10^{-15} \text{ эв},$$

и «расстояние» между соседними уровнями

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \\ = (2n+1) \cdot 3,5 \cdot 10^{-15} \text{ эв}.$$

Это «расстояние» столь мало, что практически спектр электрона сплошной. Если же ящик имеет размеры атомного порядка, например, $L = 1 \text{ \AA} = 10^{-8}$ см, то $E_n = n^2 \cdot 5,6 \times 10^{-18} \text{ дж} = n^2 \cdot 35 \text{ эв}$, и «расстояние» между соседними уровнями

$$\Delta E_n = (2n+1) \cdot 35 \text{ эв}.$$

Это очень большие «расстояния», и спектр энергии действительно дискретный.

Условие квантования энергии (4), которое мы получили, пользуясь аналогией с колебаниями струны, оказывается вполне строгим — оно точно совпадает с тем, которое дает решение уравнения Шредингера для данной задачи. Мы еще вернемся к формуле (4) и покажем, какие интересные результаты из нее следуют. А пока обратимся к другой задаче.

Гармонический осциллятор

Рассмотрим квантование гармонического осциллятора. Так называется частица, находящаяся под действием упругой силы $f = -kx$, пропорциональной отклонению x частицы от положения равновесия и стремящейся вернуть частицу в это положение.

Коэффициент пропорциональности k — константа, характеризующая упругие свойства системы, со стороны которой действует упругая сила. Например, в случае пружины k — жесткость пружины.

Выведенный из положения равновесия осциллятор совершает гармо-

нические колебания с частотой

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5)$$

Энергия гармонического осциллятора в любой момент времени (при любом отклонении x от положения равновесия) складывается из потенциальной $P = \frac{kx^2}{2}$ и кинетической $K = \frac{mv_x^2}{2}$ энергий, т. е.

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2}.$$

Если колеблется микрочастица, то ее полная энергия оказывается квантованной. Найдем условия квантования.

График потенциальной энергии ос-

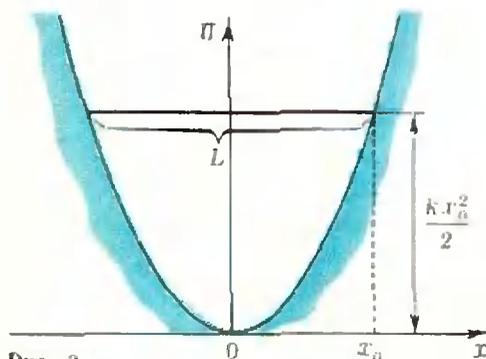


Рис. 3.

циллятора — парабола $P = \frac{kx^2}{2}$ (рис. 4).

Микрочастица, колеблющаяся с максимальным отклонением x_0 , по существу, движется по отрезку длины $2x_0$, и скорость этого движения зависит от координаты x ($v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}$). Поэтому длина волны де Бройля, соответствующей частице, не будет оставаться постоянной. Это значительно усложняет решение задачи. Чтобы упростить решение, сделаем нестрогое допущение — предположим, что между точками x_0 и $-x_0$ на всем отрезке полная энергия частицы равна кинетической энергии.

Сделанное нами допущение означа-

ет, что осциллятор можно рассматривать как частицу в «потенциальном ящике», «глубина» которого $\frac{kx_0^2}{2}$ (см. рис. 3). На «стенках» полная энергия равна потенциальной, т. е.

$$E = \frac{kx_0^2}{2}.$$

Следовательно, расстояние между стенками

$$L = 2x_0 = 2\sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Тот факт, что внутри «ящика» на всем отрезке L кинетическая энергия остается постоянной ($\frac{mv^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}$), означает, что скорость частицы внутри «ящика» постоянна. Такой частице соответствуют стоячие волны де Бройля, длины которых определяются условием

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{4}{n} \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Следовательно, возможные значения скорости частицы

$$v_n = \frac{nh}{4m} \sqrt{\frac{k}{2E}}.$$

Найдем возможные значения энергии осциллятора:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{nh}{4m} \sqrt{\frac{k}{2E}} \right)^2.$$

откуда

$$E_n = \frac{nh}{8} \sqrt{\frac{k}{m}},$$

или, с учетом (5),

$$E_n = \frac{\pi}{4} nhv \quad (6)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Строгое решение задачи с помощью уравнения Шредингера имеет вид

$$E_n = nhv + \frac{1}{2} hv \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Существенно, что нестрогое решение (6) отражает основную особенность квантования осциллятора —

пропорциональность значения энергии квантовому числу n . Уровни энергии гармонического осциллятора расположены на равных расстояниях друг от друга. И это также отражает решение (6). Правда, в строгом решении эти расстояния равны $h\nu$, а в нестрогом — $\frac{\pi}{4} h\nu$. (Опыт

подтверждает, конечно, строгое решение.) Кроме того, согласно строгому решению минимальная энергия гармонического осциллятора при $n=0$ отлична от нуля и равна $\frac{h\nu}{2}$ (рис. 4а).

В нестрогом решении $E_0=0$ (рис. 4б).

Из условия квантования (6) следует, что возможные значения максимального отклонения от положения

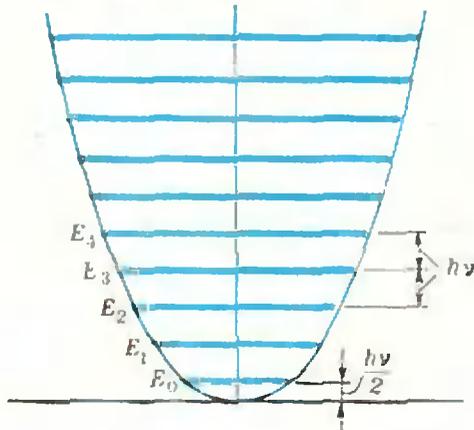


Рис. 4а.

равновесия дискретны:

$$E_n = \frac{kx_n^2}{2} = \frac{\pi}{4} nh\nu,$$

откуда

$$x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} nh \frac{\nu}{k}}. \quad (8)$$

Этот вывод кажется совсем странным. Ведь амплитуда колебаний, по существу, задается начальным смещением из положения равновесия. А из «житейского» опыта известно, что смещение, скажем, шарика на пружинке можно менять плавно, непрерывно. В чем же дело? Попробуйте сами, пользуясь формулой (8), найти расстояние между «соседними» значениями

x_n и x_{n+1} , например, для шарика массы $m=10$ г, колеблющегося на пружинке жесткости $k=1000$ н/м. И вы убедитесь, что это расстояние столь мало, что спектр возможных значений x практически непрерывный. И только для микрочастиц спектры E_n и x_n дискретны.

Атом водорода

Рассмотрим еще одну задачу — о квантовании энергии атома водорода. Впервые эта задача была решена Нильсом Бором. Он рассчитал спектр атома водорода, пользуясь так называемой планетарной моделью. Хотя расчетные значения энергии электрона совпадали с наблюдаемым спек-

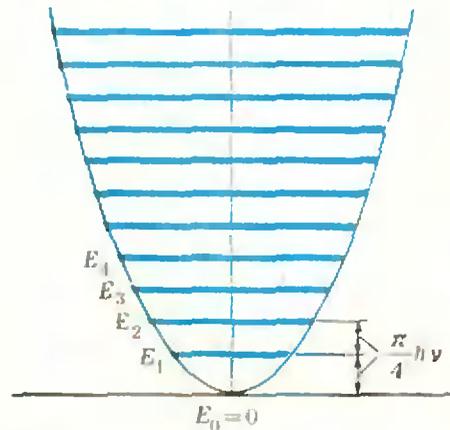


Рис. 4б.

ром, эта модель не позволяла рассчитать другие характеристики атома.

Согласно современным представлениям квантовой механики планетарная модель лишь очень условно отражает действительное поведение электронов. В атоме водорода единственный электрон как бы образует вокруг ядра электронное облако — облако отрицательного заряда, плотность которого характеризует вероятность нахождения электрона в данной области внутри атома. В невозбужденном состоянии атома радиус сферы наибольшей плотности равен приблизительно $0,53$ А. (В планетарной модели этому расстоянию

соответствует наименьший радиус орбиты электрона $\sim 0,53 \text{ \AA}$.)

Как мы уже говорили, на вопросы о строении и свойствах электронных оболочек атомов дает ответ решение уравнения Шредингера для данной системы. Мы же попытаемся решить задачу о квантовании энергии атома водорода, не пользуясь ни планетарной моделью, ни уравнением Шредингера — ограничимся по-прежнему механической аналогией с колебаниями струны с закрепленными концами.

Потенциальная энергия электрона, обусловленная его взаимодействием с ядром, равна

$$P = -\frac{e^2}{r}.$$

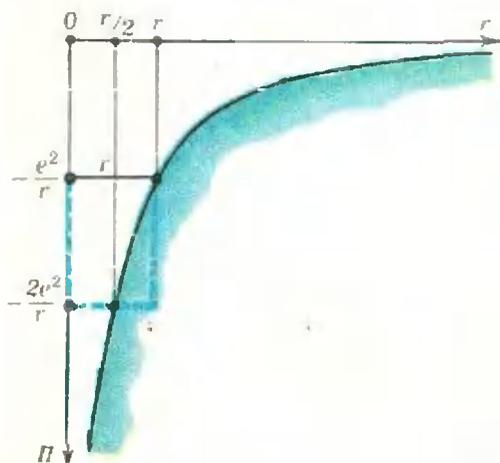


Рис. 5а.

где e — величина заряда электрона, а r — радиус сферы наиболее вероятного пребывания электрона в атоме (т. е. радиус сферы наибольшей плотности электронного облака).

График зависимости $P(r)$ — потенциальная кривая — имеет вид гиперболы (рис. 5а). Можно считать, что при данном значении r электрон движется в атоме внутри области, линейный размер которой равен r .

Будем считать, что на «границе» этой области вся энергия электрона равна его потенциальной энергии, т. е.

$$E = P = -\frac{e^2}{r}.$$

«Внутри» отрезка энергия электрона в каждой точке x складывается из кинетической и потенциальной:

$$E = \frac{mv^2(x)}{2} + P(x) = -\frac{e^2}{r}. \quad (9)$$

Скорость электрона меняется на протяжении отрезка r ; следовательно, длина волны де Бройля, соответствующей электрону, не будет постоянной. Это усложняет решение задачи. Чтобы упростить его, сделаем следующее допущение: будем считать, что скорость электрона постоянна. Например, пусть скорость равна по величине значению $v(r/2)$.

Так как $P(r/2) = -\frac{2e^2}{r}$, то из (9) находим значение $v = v(r/2)$

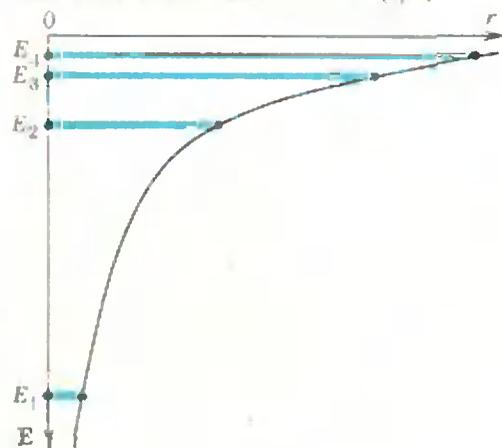


Рис. 5б.

$$v = \sqrt{\frac{2e^2}{mr}} = \sqrt{\frac{-2E}{m}}. \quad (10)$$

Сделанные нами допущения, по существу, означают, что мы представляем электрон в атоме как частицу в «потенциальном ящике», «глубина» которого равна $-\frac{e^2}{r}$, а «ширина» равна r (см. рис. 5а). Такой частице соответствуют стоячие волны де Бройля, возможные длины которых определяются условием

$$\lambda_n = \frac{2r}{n} = -\frac{2e^2}{nE}.$$

Следовательно, возможные значения скорости электрона

$$v_n = \frac{h}{m\lambda_n} = -\frac{hnE}{2me^2}. \quad (11)$$

Согласно (10) полная энергия электрона может быть выражена через его скорость: $E = -\frac{mv^2}{2}$. Подставив возможные значения v_n из (11), получим

$$E = -\frac{mv_n^2}{2} = -\frac{h^2n^2E^2}{8me^4}.$$

Следовательно, возможные значения энергии электрона —

$$E_n = -\frac{8me^4}{n^2h^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (12)$$

Строгое решение этой задачи (решение уравнения Шредингера) имеет вид

$$E_n = -\frac{2a^2me^4}{n^2h^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (13)$$

Решения (12) и (13) отличаются друг от друга лишь численными множителями. Так что полученное нами решение качественно верно описывает спектр атома водорода. Уровни энергии электрона в атоме сближаются при возрастании квантового числа n (рис. 5б). Значения энергий на разных уровнях относятся как

$$E_1 : E_2 : E_3 : \dots = 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{9} : \dots$$

С ростом n энергия электрона растет (напомним, что $E_n < 0$), и при $n \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) обращается в нуль.

Электрон отрывается от атома. Энергия свободного электрона положительна, а спектр ее возможных значений непрерывный.

Таким образом, соображения о стоячих волнах де Бройля в рассмотренных нами случаях помогают объяснить квантование энергии системы.

Металлическая модель молекулы

Вернемся теперь к потенциальному ящику с бесконечными стенками. В отличие от других задач, мы получили здесь вполне строгое решение. Спрашивается, где может понадобиться такая модель? В теории молекулы.

Молекулы органических соединений, в которых двойные связи углерод — углерод сопряжены с единичными связями, т. е. чередуются с ними, обладают подвижными электронами. На каждую двойную связь приходится по два подвижных электрона (они называются π -электронами). Эти электроны могут свободно перемещаться вдоль всей системы связей, но, конечно, для того чтобы покинуть молекулу, электроны должны приобрести очень большую энергию.

Вещества, молекулы которых содержат большое число сопряженных связей, т. е. π -электронов, окрашены. Это значит, что, в отличие от большинства органических соединений, которые бесцветны, эти вещества поглощают свет в видимой области спектра. Именно такими веществами являются органические красители. Длина волны поглощаемого света тем больше, чем больше число сопряженных связей, т. е. чем больше число π -электронов. Например, в ряду углеводородов с сопряженными связями длины волн λ , отвечающие наиболее длинноволновому поглощению, представлены в таблице.

Формула углеводорода	Число π -электронов	Длина волны поглощаемого света λ , нм
$H_2C=CH_2$	2	180
$H_2C=CH-CH=CH_2$	4	217
$H_2C=HC=CH=CH=CH=CH=CH=CH=CH_3$	8	320
$H_2C=HC=CH=CH=CH=CH=CH=CH=CH=CH=CH=CH_3$	12	372

Эти вещества поглощают свет в ультрафиолетовой области спектра, но при дальнейшем увеличении числа сопряженных связей полоса поглощения сдвигается в видимую область. Мы видим, что λ примерно пропорциональна числу π -электронов.

Вычислим длины волн λ при помощи модели потенциального ящика.

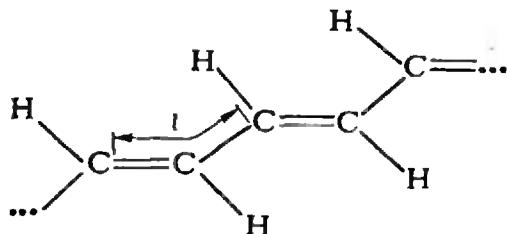


Рис. 6.

Ширина ящика L равна длине цепочки сопряженных связей, т. е. $L = Nl$, где N — число сопряженных связей, l — длина одного звена цепи (связей $C=C$) (рис. 6). Наиболее длинноволновая полоса поглощения соответствует переходу электрона с последнего занятого уровня энергии на первый свободный. Число π -электронов в молекуле с N двойными связями равно $2N$. Согласно правилам квантовой механики (принцип Паули) на каждом уровне энергии могут расположиться два электрона (с антипараллельными спинами, т. е. присутствующими электрону моментами количества движения). Следовательно, $2N$ электронов занимают N уровней, и наиболее длинноволновая полоса поглощения отвечает переходу электрона с N -го занятого уровня на $N+1$ -й уровень, который свободен. Этому переходу согласно формуле (1) соответствует частота световой волны

$$\nu_{N, N+1} = \frac{E_{N+1} - E_N}{h}.$$

Значения энергии E_{N+1} и E_N мы находим из условия (4) квантования

электрона в ящике, положив $L = Nl$:

$$E_{N+1} = \frac{(N+1)^2 h^2}{8mN^2 l^2}, \quad E_N = \frac{N^2 h^2}{8mN^2 l^2}.$$

Следовательно,

$$\nu_{N, N+1} = \frac{h}{8ml^2} \frac{2N+1}{N^2}.$$

Этой частоте соответствует длина волны (c — скорость света)

$$\lambda = \frac{c}{\nu_{N, N+1}} = \frac{8mcl^2}{h} \frac{N^2}{2N+1}.$$

Если N велико и можно пренебречь единицей по сравнению с $2N$, то

$$\lambda \approx \frac{4mcl^2}{h} N.$$

При большом числе сопряженных связей длина волны поглощаемого света пропорциональна этому числу. Наша теория, основанная на простой модели потенциального ящика, согласуется с опытом и объясняет спектральные свойства молекул с сопряженными связями. В физике молекул принято называть модель потенциального ящика металлической моделью молекулы, так как модель исходит из того, что π -электроны свободно перемещаются вдоль молекулы подобно электронам в металлической проволоке.

Это только один пример применения нашей модели. Она позволяет рассчитать и объяснить многие другие свойства сопряженных систем.

Мы видим, что элементарные свойства струны весьма поучительны. Они объясняют очень важные квантовомеханические закономерности без решения уравнения Шредингера.



В. Майер

Опыты по полному внутреннему отражению

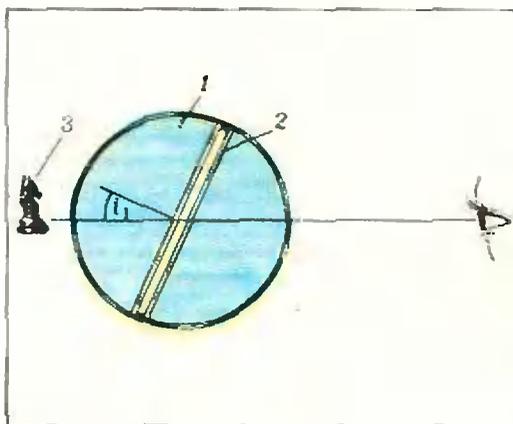


Рис. 1. 1 — стакан с водой, 2 — стеклянные пластинки, 3 — предмет.

В 70-х годах прошлого столетия был разработан простой метод определения показателей преломления жидкостей, основанный на использовании явления полного внутреннего отражения света. Мы предлагаем вам поставить опыт, иллюстрирующий этот интересный метод.

Между двумя тонкими стеклянными пластинками положите вырезанную в виде рамки картонную прокладку и обмажьте края пластинок пластилином так, чтобы воздушная полость между ними была изолирована от окружающей среды. В стеклянную банку или стакан налейте воду и вертикально погрузите в нее пла-

стинки. Посмотрите через стакан и пластинки, ориентированные перпендикулярно к лучу зрения, на какой-нибудь достаточно ярко освещенный предмет (рис. 1). Теперь постепенно поворачивайте пластинки, меняя угол между ними и направлением наблюдения. Начиная с некоторого значения этого угла, вместо предмета, расположенного за стаканом с водой, вы увидите блестящую, как превосходное зеркало, внутреннюю поверхность ближайшей к глазу пластинки.

Ясно, что результат опыта объясняется явлением полного внутреннего

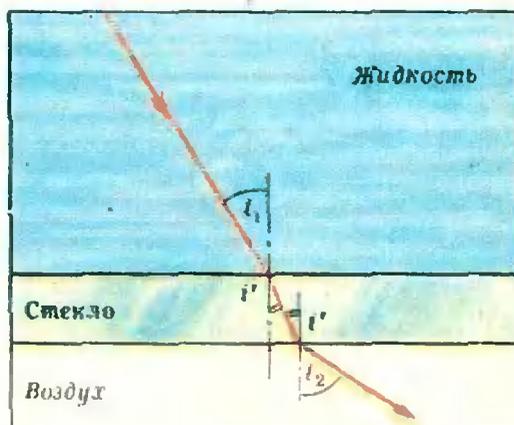


Рис. 2.

отражения: при переходе света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду существует такой предельный угол падения света на границу раздела сред, что угол преломления составляет 90° . Если угол падения превышает предельный, то свет во вторую среду не проникает.

Можно ли в описанном выше опыте определить показатель преломления жидкости? На первый взгляд, казалось бы, нет: свет переходит в воздух из стекла, а значит, предельный угол зависит от показателя преломления стекла. Однако более внимательное рассмотрение условий опыта показывает, что это не так. Действитель-

но, пусть абсолютные показатели преломления стекла и жидкости соответственно равны $n_{ст}$ и $n_{ж}$. Тогда по закону преломления (рис. 2).

$$\frac{\sin i_1}{\sin i'} = \frac{n_{ст}}{n_{ж}}. \quad (1)$$

Поскольку стеклянная пластинка плоскопараллельна, i' — это одновременно угол падения света на границу стекло — воздух. Если наблюдается полное внутреннее отражение, то угол преломления $i_2 = 90^\circ$. Следовательно, для границы раздела стекло — воздух по закону преломления

$$\frac{\sin i'}{\sin i_2} = \sin i' = \frac{1}{n_{ст}}. \quad (2)$$



Рис. 3а.

Сопоставляя формулы (1) и (2), видим, что

$$n_{ж} = \frac{1}{\sin i_1}.$$

Следовательно, в описанном эксперименте можно определить показатель преломления жидкости, если измерить угол падения i_1 света из жидкости на стеклянную пластинку.

Это можно сделать с помощью транспортира, положенного на дно банки. По результатам измерений, пользуясь таблицами значений синусов, можно вычислить показатель преломления жидкости.

Полное внутреннее отражение — настолько красивое явление, что труд-

но удержаться и не рассказать о фокусе, которым вы можете озадачить своих малолетних товарищей.

Плоской пластинкой, вырезанной из оргстекла, разделите небольшой стаканчик на две части, промазав щели между пластинкой и внутренней поверхностью стакана пластилином. В одну половину стакана налейте воду. В другую поместите какой-нибудь предмет (мы использовали значок с изображением популярного киногероя). Из картона сделайте экран, ограничивающий поле зрения так, чтобы наблюдатель мог видеть стакан только из одного положения. Поворачивайте стакан с водой и пред-



Рис. 3б.

метом до тех пор, пока не наступит полное внутреннее отражение света: при этом предмет, находящийся во второй половине стакана, виден не будет. Опустите в эту половину стеклянную трубку, соединенную с резиновой грушей, в которую набрана вода. Нажимая на грушу, вы будете поднимать уровень воды во второй половине стакана, и при этом «появится» предмет; уменьшая давление на грушу, вы вновь заставите предмет «исчезнуть».

С помощью пластинок с «воздушной прокладкой» этот фокус можно осуществить и так, как показано на рисунках 3а и 3б.

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной Олимпиады школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получают право участия в республиканском туре Всесоюзной олимпиады.

За прошлый, 1975 год редакция получила много писем с решениями задач. Редколлегия журнала «Квант» совместно с членами Оргкомитета отобрала авторов правильных и наиболее интересных решений.

Ниже публикуется список школьников — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участвовать в республиканских олимпиадах 1976 года.

Математика

- О. АПОЛОНСКИЙ г. Жуковский, с. ш. 1, 10 кл.
 З. БЕРКАЛИЕВ г. Караганда, с. ш. 1, 10 кл.
 М. ГЕДАЛИН г. Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 10 кл.
 Р. ГИЛЯЗОВ г. Навои, с. ш. 1, 10 кл.
 В. ГИШЛАРКАЕВ с. Урус-Маршан ЧН АССР, с. ш. 3, 10 кл.
 С. ГРИШИН г. Рыбное, Рыбновская с. ш., 10 кл.
 В. ГУСЕЙНОВ г. Нахичевань, с. ш. 3, 10 кл.
 А. ДАНИЛОВ г. Шумерля, с. ш. 1, 10 кл.
 А. ДИДЕНКО г. Краснодар, с. ш. 28, 9 кл.
 М. ИМЕРЛИШВИЛИ г. Тбилиси, с. ш. 101, 10 кл.
 И. КАЛИКА г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
 А. КАМАЛЯН г. Иджеван, Русская с. ш. им. Б. Нерсисяна, 10 кл.
 А. КНЯЗЮК г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
 Ш. КУХАЛЕИШВИЛИ г. Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 10 кл.
 Д. ЛИТВИНЕНКО г. Севастополь, с. ш. 34, 10 кл.
 С. ЛИФИЦ г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
 В. МЕДВЕДЬ г. Молодечно, с. ш. 3, 9 кл.



- И. МОРОЗОВ г. Горький, с. ш. 184, 10 кл.
 О. ОКУНЕВ г. Казань, с. ш. 122, 10 кл.
 Д. ПАНУШ г. Харьков, с. ш. 27, 8 кл.
 С. ПОСЛАВСКИЙ г. Харьков, с. ш. 116, 10 кл.
 Ю. ПОШЕХОНОВ г. Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
 А. РОМАНОВ г. Ташкент, с. ш. 103, 10 кл.
 В. СМИРНОВ г. Уфа, с. ш. 86, 9 кл.
 С. ТРЕГУБ г. Ташкент, с. ш. 103, 10 кл.
 Ю. ФИЛОСОВОВ г. Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
 С. ФЛЮРЯ Сату-Ноуская с. ш. Чимшайский р-н Молд. ССР
 В. ЯЦАЛО Зареченская с. ш. Ровенской обл., 10 кл.

Физика

- Х. АБДУЛЛИН г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
 Г. АНЗИН г. Брест, с. ш. 1, 10 кл.
 М. ГЕДАЛИН г. Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 10 кл.
 О. ГОДИН г. Симферополь, с. ш. 40, 10 кл.
 Г. ГОЛУБЦОВА г. Москва, с. ш. 410, 8 кл.
 Ю. ГОШК г. Брянск, с. ш. 5, 10 кл.
 А. КНЯЗЮК г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
 К. КОПЕЙКИН г. Ленинград, с. ш. 239, 10 кл.
 С. КОПЫЛОВСКИЙ п. Знобь-Новгородское Сумской обл.,
 с. ш. 10 кл.
 О. ЛИЩЕНКО г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
 И. МОРОЗОВ г. Горький, с. ш. 184, 10 кл.
 Ю. МУХАРСКИЙ г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
 В. ПОЗНЯК г. Барановичи, с. ш. 8, 10 кл.
 Е. ПОНОМАРЕВ п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. 82, 8 кл.
 И. РУДОЙ г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
 П. САРГАЗАКОВ г. Новосибирск, ФМШ при НГУ, 10 кл.
 И. СОКОЛОВ г. Москва, с. ш. 179, 10 кл.
 Ю. ХАБАРОВ г. Павлово-Посад Моск. обл., с. ш. 1, 10 кл.

Задачник «Кванта»

Задачи

М371—М375; Ф383—Ф387

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 мая 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М371 или «...Ф383». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письме вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

М371. В каждой клетке шахматной доски написано целое число от 1 до 64, причем в разных клетках — разные числа. За один вопрос можно, указав любую совокупность полей, узнать совокупность (множество) чисел, стоящих на этих полях. За какое наименьшее число вопросов можно узнать число в каждой клетке?

С. Фомин

М372. Дан треугольник ABC . Доказать, что условие $\widehat{ACB} \geq 120^\circ$ необходимо и достаточно, чтобы для любой точки P плоскости выполнялось неравенство $|AP| + |BP| + |CP| \geq |AC| + |BC|$.

П. Хайдуков

М373. а) Все натуральные числа (записанные в десятичной системе) разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную десятичную дробь можно разрезать на такие конечные куски, чтобы все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежали одному классу.

б) Та же задача, но натуральные числа разбиты не на два, а на несколько классов.

М374. Пусть a , b и c — положительные числа, $a > c$ и $b > c$. Докажите неравенство

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

А. Резников

М375. Внутри выпуклого многогранника объема 1 отмечено $3 \cdot (2^n - 1)$ точки.

Доказать, что из него можно вырезать выпуклый многогранник объема $(1/2)^n$, не содержащий внутри себя ни одной отмеченной точки.

В. Макеев

Ф383. Цепочка массы m и длины l надета на гладкий круговой конус с углом при вершине 2α . Конус вместе с цепочкой вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии конуса. Плоскость цепочки горизонтальна. Найти натяжение цепочки.

Ф384. Две взаимодействующие между собой частицы 1 и 2 с массами m_1 и m_2 соответственно об-

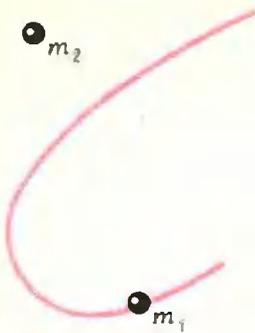


Рис. 1.

разуют замкнутую систему. На рисунке 1 показана траектория частицы 1 и положение обеих частиц в момент времени, когда скорость частицы 1 равна v , а скорость частицы 2 равна $3v$. Построить траекторию частицы 2, если $\frac{m_1}{m_2} = 3$.

Ф385. Большая тонкая проводящая пластина площади S и толщины d помещена в однородное электрическое поле E , перпендикулярное пластине. Какое количество тепла выделится в проводнике, если поле выключить?

П. Зубков

Ф386. В вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника, катет которого равен a , расположены одинаковые металлические шарики радиусов r ($r \ll a$). Шарики заряжены зарядом q каждый. Шарики 1 и 2 соединяют проводником, затем проводник убирают. Затем также поступают с шариками 2 и 3 и, наконец, с шариками 3 и 1. Какие заряды установились на шариках?

Ф387. Два велосипедиста в цирке едут с одинаковыми линейными скоростями v по окружностям радиусов R_1 и R_2 , центры которых находятся на расстоянии l друг от друга ($l < (R_1 + R_2)$). Один из велосипедистов движется по часовой стрелке, другой — против. Найти относительные скорости велосипедистов (в системе координат, связанной с одним из них) в тот момент, когда они оба находятся на линии, проходящей через центры окружностей, в точках: а) A_1 и A_2 ; б) A_1 и B_2 ; в) B_1 и B_2 ; г) A_2 и B_1 (рис. 2).

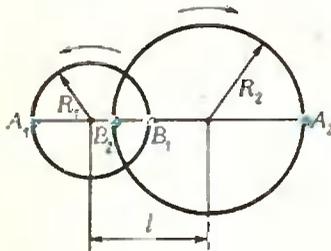


Рис. 2.

Решения задач

М331—М335; Ф343—Ф347

М331. а) Треугольник $A_1B_1C_1$ получился из треугольника ABC поворотом вокруг центра описанной окружности на некоторый угол, меньший 180° . Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых: (AB) и (A_1B_1) , (BC) и (B_1C_1) , (CA) и (C_1A_1) — являются вершинами треугольника, подобного треугольнику ABC .

б) Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ получился из четырех-

Многие читатели прислали решения этих задач, основанные на рассмотрении вписанных углов. Такие решения, как правило, не содержали разбора случая, при котором пересекаются не соответствующие стороны, а их продолжения. Приведем более простое и общее решение, использующее геометрические преобразования.

а) Обозначим точку пересечения прямой AB с прямой A_1B_1 (получившейся из (AB) поворотом вокруг центра O описанной окружности на угол α) через C_2 : $C_2 = (AB) \cap (A_1B_1)$ (рис. 1). Проведем из центра O перпендикуляр OC_0 к хорде AB ; тогда C_0 — середина хорды AB . Очевидно, что

$$|OC_2| \cdot |\cos \frac{\alpha}{2}| = |OC_0|.$$

угольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O , поворотом вокруг центра O на некоторый угол, меньший 180° . Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых: (AB) и (A_1B_1) , (BC) и (B_1C_1) , (CD) и (C_1D_1) , (DA) и (D_1A_1) — являются вершинами параллелограмма.

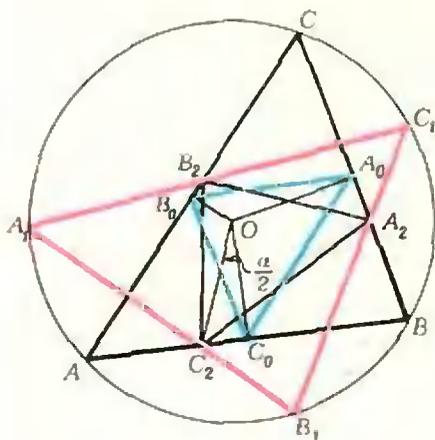


Рис. 1.

Следовательно, середина C_0 хорды AB переходит в точку C_2 пересечения прямых AB и A_1B_1 в результате последовательного выполнения двух преобразований: поворота на угол $\frac{\alpha}{2}$ относительно центра O и гомотетии с тем же центром и коэффициентом $1/|\cos \frac{\alpha}{2}|$. Указанное преобразование не зависит от выбора хорды, поэтому после его выполнения середины A_0 и B_0 хорд BC и AC соответственно переходят в точки $A_2 = (BC) \cap (B_1C_1)$ и $B_2 = (CA) \cap (C_1A_1)$. Из этого следует, что треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_0B_0C_0$ с коэффициентом подобия $1/|\cos \frac{\alpha}{2}|$. Но треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $1/2$; значит, треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $1/2 \cdot |\cos \frac{\alpha}{2}|$.

б) Решение этой задачи совершенно аналогично предыдущему. Пусть P, Q, R, S — середины хорд AB, BC, CD, DA (рис. 2). Нетрудно доказать, что четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм. Поэтому и точки пересечения $P_1 = (AB) \cap (A_1B_1)$, $Q_1 = (BC) \cap (B_1C_1)$, $R_1 = (CD) \cap (C_1D_1)$ и $S_1 = (DA) \cap (D_1A_1)$ являются вершинами параллелограмма $P_1Q_1R_1S_1$, подобно параллелограмму $PQRS$ с коэффициентом подобия $1/|\cos \frac{\alpha}{2}|$.

З. Скопец

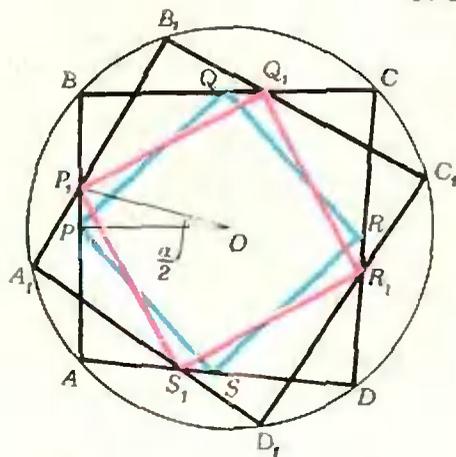


Рис. 2.

М332. Можно ли составить куб размерами $k \times k \times k$ из белых и черных кубиков $1 \times 1 \times 1$ так, чтобы для каждого кубика ровно два из его соседей имели бы тот же цвет, что и он сам? (Два кубика считаются соседними, если они имеют общую грань.)

О т в е т. При k четном можно, при k нечетном нельзя.

Пример для четного k построить нетрудно: можно, например, составить куб из чередующихся черных и белых блоков размерами $2 \times 2 \times 1$ или из чередующихся слоев, изображенных на рисунке 3 (на этом рисунке показаны два сечения куба $k \times k \times k$, $k = 8$, горизонтальными плоскостями, находящимися на расстоянии единицы друг от друга).

Предположим, что и для нечетного k составить нужный куб можно. Соединим центры соседних белых кубиков отрезками. Из каждого центра будет выходить по два отрезка. Таким образом, мы получим одну или несколько замкнутых ломаных, звенья которых параллельны ребрам куба, а общая длина равна числу белых кубиков. Но длина замкнутой ломаной, составленной из единичных отрезков трех взаимноперпендикулярных направлений, очевидно, четна. Поэтому бе-

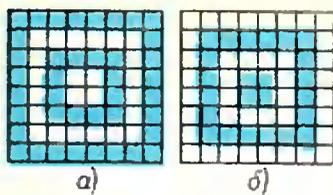


Рис. 3.

М333. Три мухи ползают по сторонам треугольника ABC так, что центр тяжести образуемого треугольника остается на одном месте. Докажите, что он совпадает с центром тяжести треугольника ABC , если известно, что одна из мух проползла по всей границе треугольника. (Центром тяжести называется точка пересечения его медиан.)

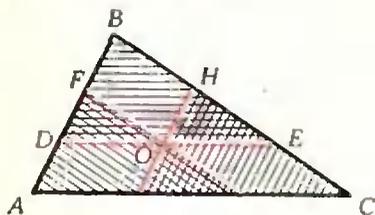


Рис. 4.

М334. Дан многочлен $P(x)$:
а) с натуральными коэффициентами,
б) с целыми коэффициентами.

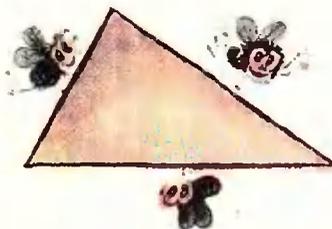
Для каждого натурального числа n через a_n обозначим сумму цифр в десятичной записи числа $P(n)$. Докажите, что найдется число, которое встречается в последовательности a_1, a_2, a_3, \dots бесконечное число раз.

лых кубиков — четное число. Аналогично докажем, что и черных кубиков четное число. Но общее число k^3 кубиков — нечетно. Получили противоречие, следовательно, при нечетном k нужный куб составить нельзя.



Так как центр тяжести треугольника лежит на медиане и делит ее в отношении 2 : 1 (считая от вершины), то когда одна из мух находится в вершине B , центр тяжести «треугольника мух» находится внутри треугольника DBE , где $|BD| : |DA| = |BE| : |EC| = 2 : 1$ (рис. 4). Одна из мух побывала во всех вершинах, следовательно, центр тяжести «треугольника мух» лежит в пересечении заштрихованных на рисунке 4 треугольников DBE, CKH и AFQ , т. е. в точке O — центре тяжести треугольника ABC .

И. Васильев



Пусть $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, $c_n \neq 0$.
а) Числа $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ — неотрицательны.

Рассмотрим такое натуральное число l , что 10^l больше всех чисел $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$. Тогда в десятичной записи числа $a_l = P(10^l)$ будут сначала идти цифры числа c_n , затем нули; затем цифры числа c_{n-1} — опять нули; цифры числа c_{n-2} — нули и т. д. Таким образом, сумма цифр числа $a_l = P(10^l)$ равна сумме S цифр всех чисел $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$. Рассуждая аналогично, мы видим, что

$S = \text{сумма цифр } a_{10}^{l+1} = \text{сумма цифр } a_{10}^{l+2} = \dots$,
т. е. число S встречается в последовательности a_1, a_2, \dots бесконечное число раз.

б) Заменяя, если нужно, $P(x)$ на $-P(x)$, мы можем считать, что $c_n > 0$. Пусть m — какое-то натуральное число. Положим $Q(x) = P(x+m) = c_n(x+m)^n + c_{n-1}(x+m)^{n-1} + \dots + c_1(x+m) + c_0$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, мы видим, что $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если b_k — сумма цифр числа $|Q(k)|$, то ясно, что $b_k = a_{k+m}$. Поэтому нам достаточно подобрать число m так, чтобы все коэффициенты многочлена $Q(x)$ были неотрицательны; тогда некоторое число будет бесконечное число раз встречаться в последовательности b_1, b_2, \dots и, значит, встречаться бесконечное число раз и в последовательности a_1, a_2, \dots . Покажем, что для этого нам достаточно взять любое число m , строго большее всех чисел $|c_{n-1}|, |c_{n-2}|, \dots, |c_0|$. Действительно,

$$P(x) = (c_n - 1)x^n + (x + c_{n-1} - 1)x^{n-1} + (x + c_{n-2} - 1)x^{n-2} + \dots + (x + c_0 - 1) + 1$$

Поэтому

$$Q(x) = (c_n - 1)(x + m)^n + (x + (m + c_{n-1} - 1) + m)^{n-1} + \dots + (x + (m + c_0 - 1)) + 1.$$

Поскольку числа m , $m + c_{n-1}$, $m + c_{n-2} - 1$, ..., $m + c_0 - 1$, 1 — неотрицательны, то, раскрыв скобки и приведя подобные члены, мы получим, что все коэффициенты многочлена $Q(x)$ неотрицательны.

И. Бернштейн

М335. а) В квадрате 7×7 клеток отмечены центры k клеток. При этом никакие четыре отмеченные точки не являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно?

б) Решите ту же задачу для квадрата 13×13 клеток.

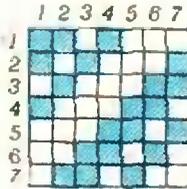


Рис. 5.

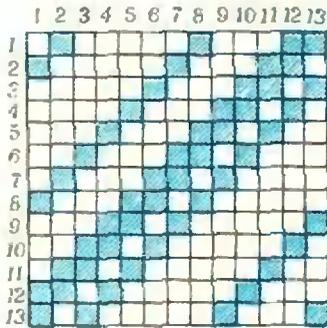


Рис. 6.

Квадрат 7×7 клеток (или 13×13 клеток) с отмеченными клетками мы назовем *правильным*, если, как говорится в условии, никакие четыре отмеченные клетки не являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. На рисунке 5 изображен правильный квадрат 7×7 клеток с 21 отмеченной клеткой, на рисунке 6 (рисунком С. Фомина) — правильный квадрат 13×13 с 52 отмеченными клетками. Очевидно, что ни в каком из них больше нельзя отметить ни одной клетки, не нарушив свойства *правильности*. Докажем, что в любом другом правильном квадрате 7×7 клеток число отмеченных клеток не превосходит 21, а в правильном квадрате 13×13 клеток — 52.

Пара вертикалей в квадрате 7×7 называется *отмеченной*, если найдется горизонталь, на пересечении которой с каждой вертикалью из этой пары лежит отмеченная клетка. Если квадрат правильный, то для каждой пары вертикалей существует не более одной такой горизонтали, а для отмеченной пары — ровно одна. Если на горизонтали с номером k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) расположено a_k отмеченных клеток, то с помощью этой горизонтали можно отметить ровно $C_{a_k}^2 = \frac{a_k(a_k - 1)}{2}$

пар вертикалей. При этом разные горизонтали отмечают разные пары вертикалей! Отсюда следует, что общее число отмеченных пар вертикалей равно

$$\frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_7(a_7 - 1)}{2} = \sum_{k=1}^7 \frac{a_k(a_k - 1)}{2}.$$

С другой стороны, очевидно, что общее число всех возможных пар вертикалей равно $C_7^2 = 21$, так что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^7 \frac{a_k(a_k - 1)}{2} \leq 21. \quad (*)$$

Наша цель — вывести из этого неравенства — неравенство:

$$\begin{aligned} \text{число отмеченных клеток} &= a_1 + a_2 + \dots + a_7 = \\ &= \sum_{k=1}^7 a_k \leq 21. \end{aligned}$$

Из неравенства (***) следует неравенство

$$\sum_{k=1}^7 \frac{a_k^2}{2} - \sum_{k=1}^7 \frac{a_k}{2} \leq 21, \quad (***)$$

или

$$\sum_{k=1}^7 a_k^2 - \sum_{k=1}^7 a_k \leq 42.$$

Найдем такое наибольшее возможное значение числа $A = \sum_{k=1}^7 a_k$, чтобы последнее неравенство все еще было верным. Нетрудно доказать (мы сделаем это ниже), что

$$\sum_{k=1}^7 a_k^2 \geq \frac{1}{7} \left(\sum_{k=1}^7 a_k \right)^2 = \frac{1}{7} A^2;$$

тогда из неравенства (***) следует, что

$$\frac{1}{7} A^2 - A \leq \sum_{k=1}^7 a_k^2 - \sum_{k=1}^7 a_k \leq 42,$$

или $\frac{1}{7} A^2 - A \leq 42$, или $A^2 - 7A \leq 294$, то есть $(A - 21)(A + 14) \leq 0$, откуда $A \leq 21$.

Доказательство для квадрата 13×13 клеток проводится аналогично, и мы советуем читателям проделать все выкладки самостоятельно.

Сейчас мы докажем (для любых $n \geq 1$, $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$) неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2.$$

Для удобства выкладок положим $na = \sum_{k=1}^n a_k$ и дока-

жем, что $\sum_{k=1}^n a_k^2 \geq na^2$. Обозначим разность между числом a_k и средним значением a чисел a_k через ε_k : $\varepsilon_k = a_k - a$. Тогда

$$na = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a + \varepsilon_k) = na + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k,$$

и поэтому

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k = 0.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k^2 &= \sum_{k=1}^n (a + \varepsilon_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n a^2 + 2a \sum_{k=1}^n \varepsilon_k + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 = na^2 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 \geq na^2. \end{aligned}$$

В заключение сделаем одно замечание. В условии и решении задачи мы обман молчаньем тот факт, что правильные квадраты из 7×7 , 13×13 (вообще, $(m^2 + m + 1) \times (m^2 + m + 1)$, где $m = 2, 3, \dots$) клеток допускают красивое геометрическое истолкование. Например, таблицу на рисунке 5 можно считать таблицей инцидентности семи точек и семи прямых на рисунке 7 (пунктирную кривую ... A ... B ... C ...

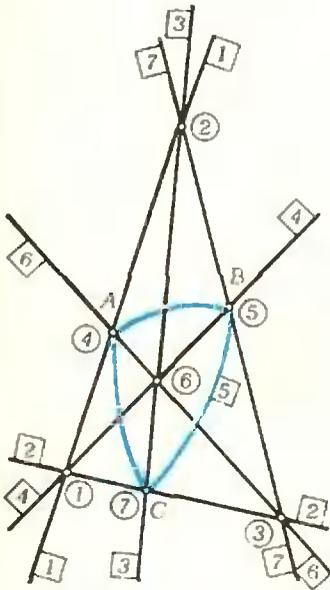


Рис. 7.

мы также относим к числу прямых): клетка, расположенная на пересечении строки с номером x и столбца с номером X ($x = 1, 2, \dots, 7$, $X = 1, 2, \dots, 7$) отмечена тогда и только тогда, когда прямая с номером x проходит через точку с номером X (на рисунке 7 номера точек заключены в кружочки, номера прямых — в квадратик). Редакция надеется вернуться к этой теме в одном из последующих номеров журнала.

Э. Белая



Ф343. Угол, под которым видно Солнце с Земли (угловой диаметр), равен приблизительно $\alpha \approx 10^{-2}$ рад. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км. Ускорение свободного падения на Земле $g \approx 10$ м/сек². Определите из этих данных отношение средних плотностей Земли и Солнца, принимая во внимание, что 1 год $\approx 3 \times 10^7$ сек.

Примечание. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, где R — радиус шара.



Рис. 8.

Ф344. Заряд Q равномерно распределен по тонкому диэлектрическому кольцу, которое лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Индукция магнитного поля, перпендикулярного к плоскости кольца, меняется от 0 до B_n . Какую угловую скорость вращения приобретает при этом кольцо? Масса кольца равна m .

При движении Земли вокруг Солнца сила тяготения $F = \gamma \frac{m_C m_3}{L^2}$ сообщает Земле центростремительное ускорение $a_{ц} = \omega^2 L = \frac{4\pi^2}{T^2} L$. Здесь ω — угловая скорость, $T = 1$ год — период обращения Земли вокруг Солнца, m_C — масса Солнца, m_3 — масса Земли и L — радиус орбиты Земли. Согласно второму закону Ньютона

$$\gamma \frac{m_C m_3}{L^2} = m_3 \frac{4\pi^2}{T^2} L. \quad (1)$$

Но $\gamma \frac{m_3}{R_3^2} = g$, следовательно,

$$m_C g \frac{R_3^2}{L^2} = m_3 \frac{4\pi^2}{T^2} L.$$

или

$$\frac{m_3}{m_C} = \frac{g R_3^3 T^2}{4\pi^2 L^3}. \quad (2)$$

Так как $m_3 = \frac{4}{3} \pi R_3^3 \rho_3$ и $m_C = \frac{4}{3} \pi R_C^3 \rho_C$,

то из соотношения (2) следует, что

$$\frac{\rho_3}{\rho_C} = \frac{g R_C^3 T^2}{4\pi^2 L^3 R_3}.$$

Теперь нам остается только выразить R_C через L и α . Очевидно, что $R_C = L \alpha/2$ (рис. 8). Поэтому окончательно получаем

$$\frac{\rho_3}{\rho_C} = \frac{g \alpha^3 T^2}{32\pi^2 R_3} \approx 4,4.$$



При изменении магнитного поля возникает электрическое поле, напряженность которого в каждой точке кольца направлена по касательной к кольцу. Эту напряженность можно вычислить, разделив э. д. с. индукции, возбуждаемую в круговом контуре радиуса R , равного радиусу кольца, на длину окружности контура:

$$E = \frac{|\mathcal{E}_{инд}|}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi R} \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|.$$

Выделим малый участок кольца длиной Δl_i с зарядом $\Delta Q_i = \frac{Q}{2\pi R} \Delta l_i$ и массой $\Delta m_i = \frac{m}{2\pi R} \Delta l_i$.

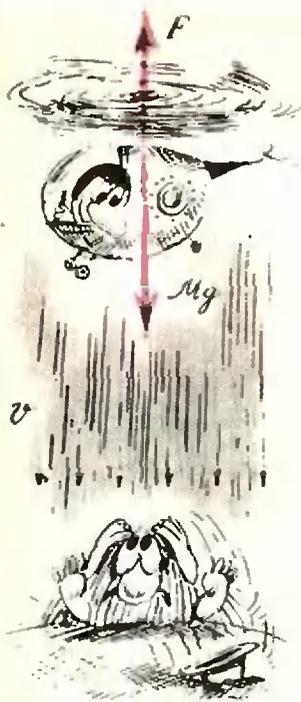


Рис. 9.

Ф345. Оцените мощность двигателя, необходимую для поддержания в воздухе вертолета массы $M = 500$ кг с лопастями длиной $l = 3$ м. Считать, что весь воздух под вращающимися лопастями движется однородным потоком вниз.

На этот участок действует электрическая сила

$$F_i = \Delta Q_i E = \frac{Q \Delta l_i}{2\pi R} \frac{1}{2\pi R} \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|,$$

которая сообщает ему ускорение, направленное по касательной к кольцу. Модуль ускорения

$$a_i = \frac{F_i}{\Delta m_i} = \frac{Q}{2\pi R m} \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|.$$

Из последнего выражения видно, что модуль ускорения не зависит от выбранного участка кольца. Это означает, что за время Δt линейная скорость всех точек кольца изменится на

$$\Delta v = a_i \Delta t = \frac{Q}{2\pi R m} \left| \Delta \Phi \right| = \frac{QS}{2\pi R m} \left| \Delta B \right| = \frac{QR}{2m} \left| \Delta B \right|.$$

К тому моменту, когда индукция магнитного поля изменится на $\sum \left| \Delta B \right| = B_0$, точки кольца приобретут линейную скорость

$$v = \sum \Delta v = \frac{QR B_0}{2m}.$$

Следовательно, угловая скорость ω вращения кольца будет равна

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{Q B_0}{2m}.$$

И. Слободецкий

Мощность двигателя равна кинетической энергии, приобретаемой «отбрасываемым» воздухом в единицу времени:

$$N = \frac{\Delta m v^2}{2},$$

где Δm — масса воздуха, «отбрасываемая» винтом за 1 сек, и v — скорость воздуха.

Вертолет находится в равновесии благодаря тому, что сила тяжести Mg уравновешивается силой F , действующей на вертолет со стороны воздуха (рис. 9). Эта сила по третьему закону Ньютона равна по абсолютной величине силе F_1 , действующей со стороны лопастей вертолета на воздух. Так как в единицу времени лопастями «отбрасывается» масса воздуха Δm со скоростью v , то воздух за одну секунду приобретает импульс $\Delta m v$. Согласно второму закону Ньютона этот импульс равен силе F_1 , действующей на воздух: $F_1 = \Delta m v$. Следовательно,

$$\Delta m v = Mg, \text{ или } \Delta m = \frac{Mg}{v}. \quad (1)$$

Тогда

$$N = \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{Mg v}{2}.$$

Если плотность воздуха равна ρ , то

$$\Delta m = \rho S v = \rho l^2 v. \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2)

$$\frac{Mg}{v} = \rho l^2 v, \text{ и } v = \sqrt{\frac{Mg}{\rho l^2}}.$$

Таким образом,

$$N = \frac{Mgv}{2} = \frac{Mg}{2l} \sqrt{\frac{Mg}{\rho\pi}}. \quad (3)$$

Плотность воздуха можно найти из уравнения состояния идеального газа

$$\rho V = \frac{m}{\mu} RT.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho\mu}{RT}. \quad (4)$$

Для оценок будем считать, что воздух находится при нормальном атмосферном давлении $p = 10^5 \text{ н/м}^2$ и при температуре $T = 300^\circ\text{К}$. Подставив соответствующие значения величин в формулы (3) и (4), найдем

$$N \approx 3 \cdot 10^4 \text{ вт} = 30 \text{ квт.}$$

С. Козел



Ф346. Одна из обкладок плоского конденсатора площадью S подвешена на пружине. Другая обкладка закреплена неподвижно. Расстояние между пластинами в начальный момент равно l_0 . Конденсатор на короткое время подключили к батарее, и он зарядился до напряжения U . Какой должна быть жесткость пружины k , чтобы не происходило касания пластинок? Сместением пластины за время зарядки можно пренебречь.

При подключении к источнику конденсатор заряжается до разности потенциалов U , и его пластины приобретают заряды $+q$ и $-q$. где

$$q = CU = \frac{\epsilon_0 SU}{l_0}.$$

Верхняя заряженная пластина конденсатора оказывается при этом в поле заряда нижней пластины, и на нее действует сила

$$F = qE,$$

где E — напряженность поля заряда нижней пластины. Так как в плоском конденсаторе линейные размеры пластины много больше расстояния между пластинами, то можно считать, что это поле совпадает с полем бесконечной равномерно заряженной плоскости. Напряженность такого поля не зависит от расстояния до плоскости и равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{U}{2l_0}.$$

Под действием силы F верхняя пластина придет в движение, растягивая пружину. Сила F , так же как и сила тяжести, не зависит от положения пластины, а сила упругости пружины по абсолютной величине пропорциональна смещению. Поэтому пластина будет совершать гармонические колебания около положения равновесия, в котором (рис. 10)

$$F + mg = F_{\text{упр}}, \quad (*)$$

где m — масса пластины. Амплитуда колебаний пластины будет равна расстоянию h между ее первоначальным положением и положением равновесия. Следовательно, пластины не будут соприкасаться, если это расстояние h меньше половины первоначального расстояния между пластинами, т. е. если

$$h < \frac{1}{2} l_0.$$

Обозначим деформацию пружины в первоначальном положении через Δx_0 . Ее деформация в новом положении равновесия равна $\Delta x_0 + h$, и

$$F_{\text{упр}} = k(\Delta x_0 + h).$$

Так как первоначально верхняя пластина находилась в равновесии, то

$$mg = k\Delta x_0.$$

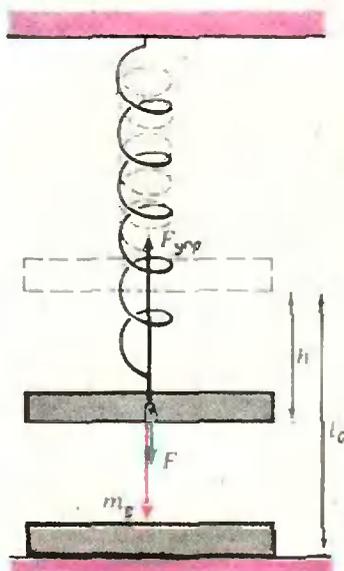


Рис. 10.

Подставив выражения для $F_{\text{упр}}$ и mg в формулу (*), получим

$$F + k\Delta x_0 = k(\Delta x_0 + h),$$

или

$$h = \frac{F}{k}.$$

Таким образом, пластины не коснутся, если

$$\frac{F}{k} < \frac{1}{2} l_0.$$

или

$$k > \frac{2F}{l_0} = \frac{2qE}{l_0} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{l_0^3}.$$



Ф347. Космический корабль вращается вокруг Луны по круговой орбите радиуса $R = 3,4 \cdot 10^6$ м. С какой скоростью нужно выбросить из корабля выпел по касательной к траектории корабля, чтобы он упал на противоположной стороне Луны? Через какое время выпел упадет на Луну? Принять, что ускорение свободного падения тел вблизи Луны в 6 раз меньше земного. Радиус Луны принять равным $1,7 \cdot 10^6$ м.

Выпел, выброшенный из корабля, должен двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Луны (рис. 11). Большая ось этой орбиты равна $R + R_L$, где R_L — радиус Луны. Найдем скорость v_1 , которую должен иметь выпел в максимально удаленной точке A этой орбиты (т. е. в точке выброса выпела из корабля). Для этого воспользуемся законом сохранения энергии и вторым законом Кеплера.

Сила тяготения между выпелом и Луной аналогична силе взаимодействия двух точечных электрических зарядов противоположных знаков. Поэтому, зная выражение для потенциала поля точечного заряда, можно по аналогии записать выражение для потенциальной энергии выпела в точке A в виде *)

$$П_A = -\gamma \frac{M_L m}{R}$$

(M_L — масса Луны, m — масса выпела). В точке B — точке касания траектории выпела поверхности Луны — потенциальная энергия равна

$$П_B = -\gamma \frac{M_L m}{R_L}.$$

Кинетическая энергия выпела в точках A и B равна

$$K_A = \frac{mv_1^2}{2} \text{ и } K_B = \frac{mv_2^2}{2},$$

где v_2 — скорость выпела в точке B . Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \gamma \frac{M_L m}{R} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{M_L m}{R_L}.$$

Сокращая на m и учитывая, что $\gamma \frac{M_L}{R_L^2} = g_L$, получим

$$\frac{v_1^2}{2} - g_L \frac{R_L^2}{R} = \frac{v_2^2}{2} - g_L R_L. \quad (1)$$

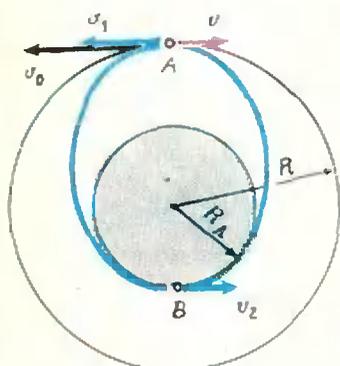


Рис. 11.

*) См., например, статью С. Козела «Физические аналогии», «Квант», 1975, № 11.

Из второго закона Кеплера можно получить еще одно соотношение между скоростями v_1 и v_2 . Согласно этому закону радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади, поэтому

$$\frac{v_1 \Delta t R}{2} = \frac{v_2 \Delta t R_{\text{Л}}}{2},$$

или

$$v_1 R = v_2 R_{\text{Л}} \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем v_1 :

$$v_1 = R_{\text{Л}} \sqrt{\frac{2g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}}{R(R_{\text{Л}} + R)}} = \sqrt{\frac{g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}}{3}},$$

так как $R = 2R_{\text{Л}}$.

Для того чтобы определить скорость, с которой нужно выбросить вымпел относительно корабля, нам еще нужно найти скорость v_0 корабля на его круговой орбите. Поскольку корабль вращается по окружности под действием силы тяготения, то

$$\gamma \frac{M_{\text{Л}} m_1}{R^2} = \frac{m_1 v_0^2}{R}$$

(m_1 — масса корабля). Отсюда

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M_{\text{Л}}}{R}} = \sqrt{\frac{g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}^2}{R}} = \sqrt{\frac{g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}}{2}}.$$

Очевидно, что $v_1 < v_0$, следовательно,

$$v = v_0 - v_1 = \sqrt{g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 200 \text{ м/сек.}$$

С такой скоростью и нужно выбросить вымпел назад, чтобы он упал на противоположную сторону Луны.

Осталось теперь найти время падения вымпела. Воспользуемся для этого третьим законом Кеплера: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит. Период обращения корабля (или вымпела) по круговой орбите радиуса R равен

$$T_0 = \frac{2\pi R}{v_0} = 4\pi \sqrt{\frac{2R_{\text{Л}}}{g_{\text{Л}}}}.$$

Обозначим через T период обращения вымпела по эллиптической орбите, касающейся поверхности Луны. Согласно третьему закону Кеплера

$$\left(\frac{T}{T_0} \right)^2 = \left(\frac{(R + R_{\text{Л}})/2}{R} \right)^3.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} T &= T_0 \sqrt{\left(\frac{(R + R_{\text{Л}})/2}{R} \right)^3} = \frac{3}{8} \sqrt{3} T_0 = \\ &= \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{6R_{\text{Л}}}{g_{\text{Л}}}} \approx 11,8 \cdot 10^3 \text{ сек} \approx 200 \text{ мин.} \end{aligned}$$

И. Слободецкий

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М326—М335; Ф338—Ф347. Жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач.

Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задачи М326. Остальные задачи решили: А. Абрамян (Ереван) 7, 2; Д. Азов (Челябинск) 7, 2, 3, 5; А. Ангелова (Болгария) 1, 3; О. Аполонский (Жуковский) 9, 0а), б), 1—3; Е. Асарин (Москва) 3; М. Бабаев (Баку) 2; З. Беркалиев (Караганда) 8а), б), 1, 3; П. Билер (Польша) 7, 1, 3, 4; О. Болтенков (Днепропетровск) 8а), б), в), 9, 1, 3; Я. Верховский (Рыбное Московской обл.) 7; А. Воронич (Москва) 1—3; А. Гарнаев (Таллин) 8а), б); Р. Гасиев (с. Суижа СОАССР) 3; Р. Гилязов (Навои) 7, 8а), б); В. Гишларкаев (с. Урус-Мартан ЧИАССР) 3; О. Годин (Симферополь) 7, 8а), 9, 3; Д. Голуб (Сумы) 7, 9, 3; Д. Гальденберг (Ленинград) 1—3; Е. Горбатый (Одесса) 7, 8а), б), в), 9; С. Гришин (Рыбное Рязанской обл.) 7, 2; М. Грищенко (ГСВГ) 7; В. Гроссман (Одесса) 2, 3; В. Гусейнов (Нахичевань) 7, 8а), б), в), 2—4; А. Данилов (Шумерля) 7, 8а), в), 9, 1—3; Н. Дарьин (Тольятти) 1, 2, 4; А. Двоскин (Ворошиловград) 2; А. Диденко (Краснодар) 2; А. Дубровин (д. Березовка Кировской обл.) 2; А. Зипин (Уфа) 8а), в); А. Иванов (Москва) 9; Н. Калика (Киев) 2, 3, 5; А. Камелян (Иджеван) 7, 9, 2, 3, 5; Б. Каплан (Киев) 3; В. Карташев (Елец) 3; В. Качалов (Киев) 1; И. Клевчук (с. Ставчаны Черновицкой обл.) 8а); А. Князюк (Киев) 7, 8а), б), в), 9, 0в), 2, 3; В. Краскевич (Польша) 4; В. Кулаквс (Ленинград) 7; К. Купало-Ярополк (Москва) 7, 9, 2, 3; М. Кутерник (Алма-Ата) 7; А. Лалаян (Красноводск) 3; Е. Ландман (Ленинград) 7, 1; Я. Ланцман (Ташкент) 9, 1, 3; Левыкин (Райчихинск Амурской обл.) 4, 5; М. Липовский (Волгоград) 3; Д. Литвиненко (Севастополь) 7; С. Лифиц (Харьков) 2, 3, 5; В. Любимов (Харьков) 7; А. Ляховец (Краснодар) 2; В. Медведь (Молодечно) 7, 8а), в), 2, 3, 5; А. Меликов (Сумгант) 0а); С. Мелихов (Донецк) 7, 9, 2, 3; А. Мень (Симферополь) 8а), в), 9; М. Морайнэ (Польша) 7, 9, 0а), 1—3; И. Морозов (Горький) 7, 8а), б), в), 9, 0а), б), в), 1—3; С. Мягков (Челябинск) 2, 3; В. Нейман (Ленинград) 7, 2—4; Л. Островерхий (с. Держановка Черниговской обл.) 7, 8а), б), в), 9, 3, 4; М. Островский (Харьков) 2, 3; Д. Папуш (Харьков) 1, 3—5; С. Петров (д. Шерашево ЧувАССР) 0а); М. Питателес (Москва) 9; П. Побылца (Ленинград) 4; С. Попов (Москва) 7, 8а); Р. Портной (Черновцы) 8а), в); С. Пославский (Харьков) 7, 8а), б), в), 9; О. Пронин (Петропавловск) 9; С. Путинцев (Невнинномысск) 1—3, 5; А. Радул (Кишинев) 8а), 9;

В. Решетов (Тронцк) 1; В. Рогова (Тбилиси) 4; Р. Романов (Москва) 3; И. Рудаков (Брянск) 7, 8а), б), в), 1—3; А. Симушев (Москва) 2, 3; В. Слепой (Томск) 1—3; В. Смирнов (Уфа) 0а), б), 1, 3; А. Спириин (Москва) 1; Л. Сыч (Димитровград) 1; С. Трезуб (Ташкент) 7, 8а), б), в), 9, 2; Н. Тренев (Москва) 7, 8б), 3—5; В. Фалько (Харьков) 1; С. Флоря (с. Сатул-Ноу МолдССР) 1, 3; М. Фоменко (Дальнегорск) 9; И. Хамитов (Ухта) 7, 9; Д. Чирадзе (Тбилиси) 2, 4; С. Шапиро (Курск) 1; В. Шпильрайн (Москва) 3; С. Яковенко (Москва) 7, 8а), б), 2; Б. Яцало (с. Морочно Ровенской обл.) 7, 9, 2—5.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами Ф338 и Ф343. Остальные задачи правильно решили: Х. Абдуллин (Алма-Ата) 0—2, 4—6; С. Агазарян (с. Суренаван АрмССР) 2; М. Агеев (Тула) 6; Г. Аизин (Брест) 9, 1, 2, 4—6; И. Астров (Таллин) 0, 7; М. Бабаев (Баку) 7; И. Бабичев (Урюпинск) 1; С. Балашов (Москва) 2; Г. Бежиашвили (Рустави) 5, 6; А. Беликов (Москва) 1, 2; В. Белоцерковский (Харьков) 5; С. Беляков (п. Степной Краснодарского кр.) 1; И. Бережинский (Дружковка) 9, 1, 6; И. Бернар (с. Великий Бычков Закарпатской обл.) 1, 4; И. Бондарцев (Люберцы) 4; 6; Я. Бондарчук (с. Высоцк Ровенской обл.) 1; А. Брюм (Донецк) 9, 1; В. Бурджанадзе (Тбилиси) 1; С. Бурнасов (Таллин) 1, 2; В. Буртовой (Килия) 1; В. Вайчачис (Куршанай) 4—6; Б. Васильев (Самарканд) 1, 4; Б. Виноградова (Великие Луки) 6; С. Власов (Камышин) 1; Н. Выскварко (д. Кевични Минской обл.) 1, 2; В. Гаврилов (Камень-Каширский) 9, 1; М. Гедалин (Тбилиси) 9—2, 4; А. Гейм (Нальчик) 7; А. Гетман (Моздок) 5, 6; Р. Гибадуллин (Бугульма) 9, 1, 6; И. Гизатуллин (д. Старый Ашт ТАСССР) 6; О. Годин (Симферополь) 9—1, 4—7; Ю. Гоник (Брянск) 9, 1, 2, 5, 7; Е. Горбатый (Одесса) 9, 1, 2; Г. Городний (Конотоп) 4; А. Громов (Куйбышев) 5—7; С. Данилов (Дрогоичин) 9, 0, 2, 4, 6; Д. Данильчин (Рязань) 9, 6, 7; М. Дворцов (Фрунзе) 1; В. Дементьев (Кировск) 5; В. Демидович (Гадяч) 6; В. Деминак (Черкасс) 5; М. Емельянов (Ташкент) 1; А. Жук (Днепропетровск) 4, 5, 7; В. Задков (Челябинск), 6, 7; А. Зарчаров (Баку) 7; Т. Заяц (с. Т. Пасека Закарпатской обл.) 1; А. Зубко (Ростов-на-Дону) 5; П. Зятиков (Урюпинск) 1, 5; С. Иванов (Харьков) 5, 6; С. Керем (Рига) 1; Ю. Кленов (Целиноград) 9, 1, 2; А. Князюк (Киев) 0, 4, 5; Д. Когосов (Москва) 5, 6; А. Козодой (Челябинск) 5; Л. Козырев (п. Плезерский КарАССР) 9; К. Колейкин (Ленинград) 4; С. Копыловский (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 9, 1, 2, 4, 5; И. Корытный (Львов) 4, 7; И. Косенкова (Калуга) 9, 4; Н. Костенко

(с. Гатиое Киевской обл.) 9, 1, 2; *О. Костенко* (Кировск Ворошиловградской обл.) 4—7; *В. Кочетков* (Кораблино) 6; *А. Криканов* (Лыткарино) 5, 7; *М. Кроль* (Павловский Посад) 9—2, 7; *П. Крупкин* (Дмитровград) 4, 5, 7; *А. Кузубов* (Краснодар) 4, 6; *И. Кузнецов* (Ленинград) 1; *З. Кучаров* (Ташкент) 5, 7; *С. Кушир* (п. Быково Московской обл.) 2; *Ю. Лебединский* (Могилев) 5; *А. Лебедь* (Днепропетровск) 9—2, 4—7; *И. Лепин* (Харьков) 5, 7; *А. Либман* (Орел) 2, 4; *Е. Либинзон* (Ярославль) 9, 2; *А. Листовничий* (Киев) 4, 7; *О. Лищенко* (Киев) 9, 1; *Т. Лищенко* (с. Юца Ставропольского кр.) 5; *М. Магид* (Даугавпилс) 9—1; *Е. Мартынова* (Курск) 1, 2; *Ю. Мартинов* (Алматы) 1; *Е. Матусов* (Москва) 7; *А. Мгеладзе* (Тбилиси) 6; *А. Мень* (Симферополь) 9—2; *М. Микаэлян* (Москва) 9, 4; *А. Минин* (Чебоксары) 6; *О. Мирзабагов* (Чериовцы) 1, 5; *М. Мирзоев* (Нахичевань) 1, 2; *А. Молотков* (п. Кубинка Московской обл.) 4; *И. Морозов* (Горький) 9, 1, 2, 4—6; *А. Морозовский* (Киев) 9—2, 4—7; *А. Мурзаев* (Нефтекамск) 5, 6; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) 1; *Ю. Мухарский* (Киев) 9, 4, 5, 7; *И. Насонов* (Ташкент) 5; *И. Нелин* (Полтава) 9, 1; *Н. Николаев* (Ногинск) 9, 2; *А. Носин* (Харьков) 9; *П. Оксюзян* (Орджоникидзе) 4; *А. Охримчук* (Выкса) 9, 0; *Р. Палюнис* (Каунас) 1; *Д. Папуш* (Харьков) 1; *В. Паразян* (Чаренцаван) 9, 0, 6; *С. Парфенер* (Вороново Гродненской обл.) 4; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 9, 0; *А. Подолек* (Пологи) 5, 6; *В. Позняк* (Барановичи) 9—2, 4, 5; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 9, 5; *С. Пяттерев* (Саратов) 1, 4, 5, 7; *А. Радул*

(Кишинев) 1, 2; *М. Райхман* (Винница) 9; *Л. Расин* (Даугавпилс) 4, 6; *В. Распономарев* (Оренбург) 9, 1, 4; *Р. Романов* (Москва) 5; *А. Рудерман* (Ленинград) 4; *И. Рудой* (Харьков) 9, 2, 4, 5, 7; *А. Савельев* (Александрия) 4, 6; *О. Самвелян* (Ереван) 5; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) 4, 6; *И. Сатаев* (Саратов) 4—7; *И. Светличнова* (Куйбышев) 6; *П. Свистун* (Магнитогорск) 1, 2; *А. Священко* (Кишинев) 9, 1; *В. Серебрянный* (Харьков) 1; *А. Симушев* (Москва) 7; *А. Смоляков* (Кадневка) 9, 1; *В. Солюнов* (Кировск) 4; *Ю. Солонубов* (Тамбов) 4; *В. Старшенко* (Запорожье) 0—2, 4, 5; *А. Суханов* (Москва) 9, 0, 1; *А. Тапочкин* (Новосибирск) 4, 6; *С. Тищенко* (Оренбург) 4; *А. Трищенко* (Комон-на-Дону) 1; *В. Трянин* (Городец Горьковской обл.) 6; *И. Тулинцев* (Чирчик) 5; *А. Тымчук* (Львов) 4; *А. Уточкин* (Ленинград) 5; *Н. Федин* (Омск) 9, 1, 2, 4—7; *Л. Фишбеин* (Березники) 0; *С. Флоря* (с. Сатул-Ноу МолдССР) 4; *А. Фрумкин* (Курск) 5—7; *Ю. Хабаров* (Павловский Посад) 9, 1, 2, 4—6; *И. Халитов* (Ухта) 9, 2; *С. Харовский* (с. В. Чернокиши Тернопольской обл.) 6; *Л. Хигер* (Ташкент) 0—2, 4—7; *Г. Хоняк* (д. Замосше Витебской обл.) 6; *В. Цырюльников* (с. Кайсарово Ульяновской обл.) 4; *Е. Черволенко* (Днепропетровск) 0; *А. Чернилевский* (Павлодар) 9, 2; *Н. Чернобаев* (п. Серышево Амурской обл.) 5, 7; *А. Чуприн* (Шахты) 5; *Ю. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 1; *С. Шаташвили* (Тбилиси) 9; *Н. Шеметов* (ст. Советская Краснодарского кр.) 6; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 9; *Г. Шпарик* (Стрый) 5, 6; *А. Щербаков* (Тамбов) 6; *Г. Якимов* (Орша) 5; *Е. Яненко* (Киев) 7.

Кто есть кто?

На рыночной площади одного маленького городка стояли три старичка с очень умными попугаями. За некоторую плату каждый попугай отвечал на заданные ему вопросы. Жители городка знали, что один из попугаев за любую плату говорит правду, другой, сколько ему ни дай, соврет, а третий отвечает согласно плате и настроению: решит, что мало дали — соврет, решит, что достаточно, — скажет правду. Но вот кто из попугаев — лжец,



кто — хитрец, а кто — честный, никто не знал, пока в город не приехал... математик.

— Кто сидит рядом с тобой? — спросил он у первого попугая.

— Лжец — был ответ.

— А ты кто такой? — спросил математик у второго попугая.

— Я хитрец!

— А кто сидит рядом с тобой? — спросил он у третьего попугая.

— Абсолютно честный попугай! — был ответ.

И математик сразу сказал, кто из попугаев действительно абсолютно честный, кто лжец, а кто хитрец.

А вы сможете это сделать?



В. Ляховский

Логарифмические и показательные...

Большая часть заданий по математике, предлагаемых на конкурсных экзаменах в вузах, сводится к решению уравнений и неравенств.

Для простейших из них, например, для квадратных уравнений и систем линейных уравнений, существуют общие методы решения. В большинстве же случаев нет правил, позволяющих решить уравнение путем последовательного выполнения арифметических действий и элементарных операций над коэффициентами уравнения. Поэтому при изучении, например, показательных и логарифмических уравнений и неравенств рассматриваются лишь частные приемы решений.

Уравнения

При решении уравнений широко применяются преобразования обеих частей данного уравнения.

О п р е д е л е н и е 1. Если все корни одного уравнения являются корнями другого уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого.

О п р е д е л е н и е 2. Два уравнения называются *эквивалентными* (*равносильными*) на некотором множестве значений неизвестного, если они имеют одни и те же корни, при-

надлежащие этому множеству, то есть если каждое из них является следствием другого.

Естественнее всего применять только такие преобразования, при которых каждое последующее уравнение эквивалентно предыдущему на рассматриваемом множестве (ниже, если это особо не оговорено, имеется в виду множество всех действительных чисел). Тогда решения последнего уравнения будут корнями и исходного уравнения.

Однако такой способ решения не всегда возможен. Иногда легче заменить уравнение неэквивалентным ему следствием, а потом провести проверку корней — нет ли среди них посторонних.

Вспомним сначала несколько основных теорем.

Т е о р е м а 1. При $a > 0, a \neq 1$ уравнение $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ эквивалентно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

Т е о р е м а 2. При $a > 0, a \neq 1$ уравнение $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ эквивалентно любой из систем

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Отметим, что если посторонние корни появляются только в результате расширения области допустимых значений (ОДЗ) неизвестного, то отделить их от корней исходного уравнения можно или проверив, входят ли они в ОДЗ, или непосредственно подставив их в исходное уравнение или в уравнение, эквивалентное исходному. Если же лишние корни могут появиться не из-за расширения ОДЗ, то необходима проверка подстановкой в исходное уравнение или в то промежуточное уравнение, при решении которого эти посторонние корни могли появиться.

З а д а ч а 1 (Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта, 1974). Решить уравнение

$$9^{\sqrt{x^2-2x}} - x - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}} - x - 1 = 2.$$

Замечая, что

$$9\sqrt{x^2-2x}-x = 3^2(\sqrt{x^2-2x}-x),$$

$$3\sqrt{x^2-2x}-x-1 = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{x^2-2x}-x,$$

положим $3\sqrt{x^2-2x}-x = t$, получим уравнение $3t^2 - 7t - 6 = 0$, имеющее корни $t_1 = 3$ и $t_2 = -\frac{2}{3}$. Второй корень не даст решений исходного уравнения, так как область значений показательной функции — множество всех положительных чисел. Следовательно, исходное уравнение в области допустимых значений неизвестного эквивалентно уравнению $3\sqrt{x^2-2x}-x = 3$, а последнее на основании теоремы 1 — иррациональному уравнению

этого момента часто приводит к ошибкам в решении.

Так, используя, например, формулы логарифмирования

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad (1)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad (2)$$

$$\log_a x^p = p \log_a x, \quad (3)$$

абитуранты часто забывают о том, что ОДЗ их левых и правых частей не совпадают.

В самом деле, правые части соотношений (1) и (2) определены для значений $x > 0$ и $y > 0$. Этим неравенствам удовлетворяют координаты точек, заполняющих первый координатный угол (рис. 1). В то же время левые части соотношений (1) и (2) имеют смысл, когда знаки x и y совпадают.

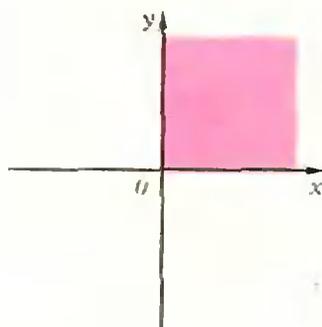


Рис. 1.

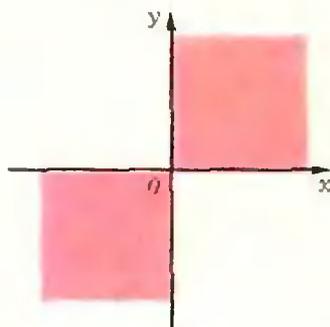


Рис. 2.

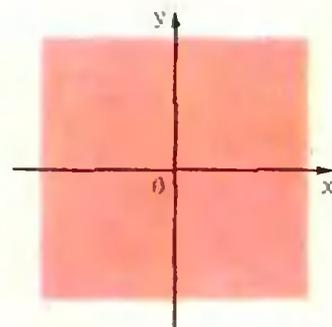


Рис. 3.

$\sqrt{x^2-2x} = x + 1$. Возведя обе его части в квадрат, найдем $x = -0,25$. Так как при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни, проверка необходима, причем лишь на этом этапе. Подстановка найденного значения x в иррациональное уравнение показывает, что оно удовлетворяет ему и, следовательно, исходному уравнению.

В большинстве случаев основная трудность решения логарифмического или показательного уравнения состоит в преобразовании исходного уравнения до тех пор, пока не появится возможность применить теоремы 1 или 2. Но при этом надо внимательно следить за изменением ОДЗ. Упущение

Этому условию удовлетворяют координаты точек, заполняющих первый и третий координатные углы (рис. 2).

Следовательно, при переходе, например, от выражения $\log_a xy$ к выражению $\log_a x + \log_a y$, ОДЗ сужается (на третий координатный угол), а это может привести к потере решений.

Правая часть равенства (3) определена лишь при $x > 0$, а ОДЗ левой части зависит от показателя степени p . Если p — целое четное число, то левая часть равенства (3) имеет смысл и при отрицательных x . Поэтому переход от выражения $\log_a x^p$ к выражению $p \log_a x$ также может привести к потере решений уравнения.

Формулы логарифмирования лучше применять в такой форме:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, \quad (1a)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, \quad (2a)$$

$$\log_a x^p = p \log_a |x| \quad (p - \text{четное}). \quad (3a)$$

Теперь правые части формул (1a) и (2a) определены при $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Этим условиям удовлетворяют все точки координатной плоскости, за исключением точек, лежащих на осях (рис. 3), и при переходе от выражения $\log_a xy$ к выражению $\log_a |x| + \log_a |y|$ ОДЗ неизвестных не сужается, а расширяется (сравните рис. 2 и рис. 3). Возможность потери решений исключена, но посторонние корни появиться могут. А в равенстве (3a) ОДЗ правой и левой части совпадают: $x \neq 0$.

Второй способ избежать изменения ОДЗ — переход от одного уравнения к эквивалентной ему системе или совокупности уравнений (неравенств). Так, уравнение $\log_a \frac{x}{y} = c$ эквивалентно совокупности уравнений $\log_a x - \log_a y = c$, $\log_a(-x) -$
 $-\log_a(-y) = c$.

Задача 2. Решить уравнение

$$\lg(x+10) + \frac{1}{2} \lg x^2 = 2 - \lg 4.$$

ОДЗ неизвестного: $x > -10$, $x \neq 0$. Поскольку $\frac{1}{2} \lg x^2 = \lg |x|$, приведем уравнение к виду $\lg(x+10) + \lg|x| + \lg 4 = 2$, откуда $\lg[4|x|(x+10)] = \lg 100$. По теореме 2 последнее уравнение эквивалентно такому:

$$4|x|(x+10) = 100$$

(поскольку $100 > 0$, неравенство выполняется). Рассматривая два случая и решая соответствующие уравнения:

$$a) \ x > 0, \ x^2 + 10x - 25 = 0,$$

$$b) \ -10 < x < 0, \ x^2 + 10x + 25 = 0,$$

находим два корня: $x_1 = -5 + 5\sqrt{2}$, $x_2 = -5$.

Нередко решение уравнения или системы уравнений можно упростить введением новых переменных.

Задача 3 (Завод-вуз при ЗИЛе, 1974). Решить уравнение

$$\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14.$$

$$\text{Обозначим } \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = u, \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = v. \text{ Тогда система}$$

$$\begin{cases} u+v=14, \\ uv=1 \end{cases}$$

при $u > 0$, $v > 0$ будет эквивалентна исходному уравнению. Ее решения:

$$u_1 = 7 + \sqrt{48}, \quad v_1 = 7 - \sqrt{48};$$

$$u_2 = 7 - \sqrt{48}, \quad v_2 = 7 + \sqrt{48}.$$

Запишем u_2 и v_2 в таком виде: $u_2 = (7 + \sqrt{48})^{-1}$, $v_2 = (7 - \sqrt{48})^{-1}$. Возвращаясь к исходной переменной, найдем $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Уравнение вида $[f(x)]^{\varphi(x)} = [g(x)]^{\psi(x)}$ обычно решают с помощью теоремы 2 логарифмированием обеих частей уравнения по некоторому основанию.

Задача 4 (Московский геолого-разведочный институт, 1975). Решить уравнение

$$x \lg^2 x^2 - 3 \lg x - 4.5 = 10 - 2 \lg x.$$

ОДЗ неизвестного: $x > 0$. На этом множестве исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$\lg(x \lg^2 x^2 - 3 \lg x - 4.5) = \lg(10 - 2 \lg x),$$

которое подстановкой $\lg x = t$ сводится к кубическому: $t(8t^2 - 6t - 5) = 0$ с корнями $t_1 = 0$, $t_2 = 1.25$ и $t_3 = -0.5$. Возвращаясь к исходной переменной, найдем: $x_1 = 1$, $x_2 = 10\sqrt[4]{10}$ и $x_3 = \sqrt{10}/10$.

Задача 5 (Новосибирский государственный университет, 1974). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $x + y > 0$. Поэтому, прологарифмировав по основанию 2 и положив $\log_2(x + y) = u$, $x - y = v$, получим систему

$$\begin{cases} \frac{u}{v} = 1 + 0,5 \log_2 3, \\ u - v = \log_2 3, \end{cases}$$

эквивалентную на множестве $x + y > 0$ исходной. Подставив значение u из первого уравнения во второе, найдем $v = 2$, а затем $u = \log_2 12$. Возвращаясь к исходным переменным и потенцируя, получим

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 12, \end{cases}$$

откуда $x = 7$, $y = 5$.

Заметим, что использование в ходе решения основного логарифмического тождества $a^{\log_a f(x)} = f(x)$ может привести к появлению посторонних решений из-за расширения ОДЗ.

Задача 6 (МФТИ, 1975) *Решить уравнение*

$$9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5.$$

Преобразуем левую часть уравнения, учитывая основное логарифмическое тождество и свойства степени: $9^{\log_3(1-2x)} = (3^2)^{\log_3(1-2x)} = (3^{\log_3(1-2x)})^2 = (1-2x)^2$. Уравнение $(1-2x)^2 = 5x^2 - 5$ является следствием, не эквивалентным исходному уравнению. Действительно, первый его корень $x_1 = -2 - \sqrt{10}$, удовлетворяет исходному уравнению, так как входит в ОДЗ, а посторонний второй корень $x_2 = -2 + \sqrt{10}$, появляется вследствие расширения ОДЗ при замене выражения $9^{\log_3(1-2x)}$, имеющего смысл при $x < 0,5$, выражением $(1-2x)^2$, определенном при любом значении аргумента.

Задача 7 (МФТИ, 1974; МАИ, 1975). *Решить уравнение*

$$\log_3(\log_2 x - 9) = 2 + \log_3(1 - 4 \log_x 4).$$

Так как $2 + \log_3(1 - 4 \log_x 4) = \log_3[9(1 - 4 \log_x 4)]$, то по тео-

реме 2 исходное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \log_2 x - 9 = 9(1 - 4 \log_x 4), \\ \log_2 x - 9 > 0. \end{cases}$$

Поскольку $\log_2 4 = \frac{1}{\log_4 2} = \frac{2}{\log_2 4}$,

положим $\log_2 x = t$; получим систему $\begin{cases} t^2 - 18t + 72 = 0, \\ t > 9, \end{cases}$

решение которой $t = 12$, откуда $x = 4096$. Заметим, что если ограничиться уравнением из смешанной системы без неравенства, то появится посторонний корень $x = 64$.

Задача 8 (МГУ, геофак, 1972; завод-вуз при ЗИЛе, 1974). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 2 \log_4 x^2 + \log_{0,2} y^3 = -1, \\ 2 \log_4 x^4 - \log_{0,2} y = 5. \end{cases}$$

В области допустимых значений неизвестных, определяемой условиями $x \neq 0$ и $y > 0$, данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 4 \log_4 |x| + 3 \log_{0,2} y = -1, \\ 8 \log_4 |x| - \log_{0,2} y = 5, \end{cases}$$

линейной относительно $\log_4 |x|$ и $\log_{0,2} y$. Эта система имеет единственное решение $\log_4 |x| = 0,5$, $\log_{0,2} y = -1$, откуда $x = \pm 2$, $y = 5$. Если опустить знаки модуля, то решение $(-2; 5)$ будет потеряно при логарифмировании.

Иногда полезно пользоваться формулой $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$, справедливой при положительных a , b и c и при $a \neq 1$. Действительно,

$$b^{\log_a c} = (a^{\log_a b})^{\log_a c} = (a^{\log_a c})^{\log_a b} = c^{\log_a b}$$

Задача 9 (Московский горный институт, 1975). *Решить уравнение*

$$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$$

Найдем ОДЗ: $x > 0$. На основании рассмотренной формулы $x^{\lg 5} = 5^{\lg x}$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $2 \cdot 5^{\lg x} = 50$, откуда $5^{\lg x} = 5^2$, $\lg x = 2$, $x = 100$.

Показательные и логарифмические уравнения могут появиться и при решении «текстовых» задач.

Задача 10 (Московский институт электронной техники, 1975). *Найти x и y , если известно, что xy , x^x и $\frac{1}{y}$ являются последовательными членами геометрической, а $\log_x(y + 1)$, $-0,5$ и $\log_x(2 - y)$ — арифметической прогрессии.*

Условие задачи можно записать в виде

$$\begin{cases} x^{2x} = xy \cdot \frac{1}{y}, \\ \log_x(y + 1) + \log_x(2 - y) = -1. \end{cases}$$

Решение этой системы найдите самостоятельно. **Ответ:** $x = 0,5$, $y = 1$.

Задача 11 (ЛГУ, факультет психологии, 1970). *Решить уравнение*

$$\log_{\sqrt{2-x^2}}(2x^2 + a) = 4.$$

Это — уравнение с параметром. Решить его — значит указать, при каких значениях параметра существуют решения и каковы они. При решении таких уравнений особенно важную роль играет контроль эквивалентности уравнений, так как проверка обычно затруднена.

Положив $x^2 = t$, приведем уравнение к виду

$$\log_{\sqrt{2-t}}(2t + a) = 4.$$

Последнее уравнение эквивалентно исходному (с учетом замены $x^2 = t$) при $t \geq 0$. В ОДЗ, определяемой соотношениями $2 - t > 0$, $2 - t \neq 1$, $2t + a > 0$, оно эквивалентно уравнению $2t + a = (2 - t)^2$, имеющему корни $t_1 = 3 + \sqrt{5 + a}$, $t_2 = 3 - \sqrt{5 + a}$. Эти корни существуют при $a \geq -5$. Корень t_1 не входит в ОДЗ ни при каких a , а корень t_2 входит при $-4 < a < -1$ и $a > -1$. Неравенство $t_2 \geq 0$ выполняется при $a \leq 4$ (проверьте!). Вернувшись к исходной переменной, получим:

$$x = \pm \sqrt{3 - \sqrt{5 + a}}$$

при $-4 < a < -1$, $-1 < a \leq 4$; при остальных a решений нет.

Неравенства

Основные определения, необходимые для решения неравенств, почти аналогичны соответствующим определениям для уравнений. Все сказанное выше о преобразованиях, изменяющих ОДЗ, справедливо и для неравенств. Однако решение неравенств имеет свои особенности и требует хорошего знания свойств входящих в них функций. В частности, необходимо помнить, что свойства показательной и логарифмической функций различны при основаниях, больших или меньших единицы: при $a > 1$ функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ монотонно возрастают, а при $0 < a < 1$ функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ монотонно убывают.

Из этих свойств вытекают важные теоремы.

Теорема 3. *Неравенство $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ при $0 < a < 1$ эквивалентно неравенству $f(x) > \varphi(x)$, а при $a > 1$ — неравенству $f(x) < \varphi(x)$.*

Теорема 4. *Неравенство $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$ при $0 < a < 1$ эквивалентно системе неравенств*

$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \end{cases}$$

а при $a > 1$ — системе

$$\begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Неравенства вида $\log_a f(x) > c$ и $a^{f(x)} > d$ ($d > 0$; вместо $>$ может стоять \geq , $<$, \leq) можно привести к виду, рассматриваемому в теоремах 3 и 4, с помощью формул $c = \log_a a^c$ и $d = a^{\log_a d}$.

Задача 12 (Московский текстильный институт, 1974). *Решить неравенство*

$$3^{2x+5} \leq 3^{x+2} + 2.$$

Заметим, что $3^{2x+5} = 3 \cdot 3^{2(x+2)}$. Положив $3^{x+2} = t$ ($t > 0$), придем к



Рис. 4.

неравенству $3t^2 - t - 2 \leq 0$. Оно удовлетворяется при $-\frac{2}{3} \leq t \leq 1$. Не-

равенство $3^{x+2} \geq -\frac{2}{3}$ справедливо при любом вещественном x . Представим 1 как 3^0 , тогда из неравенства $3^{x+2} \leq 3^0$ по теореме 3 найдем $x \leq -2$.

При решении показательных и логарифмических неравенств часто применяется метод интервалов.

Задача 13 (Московский горный институт, 1975). Решить неравенство

$$\log_2^4 x - \log_{0,5}^2 \frac{x^3}{8} + 9 \log_2 \frac{32}{x^4} < 4 \log_{0,5}^2 x.$$

ОДЗ неравенства имеет вид $x > 0$. Заметим, что в ОДЗ

$$\log_{0,5} \frac{x^3}{8} = \log_2 \frac{8}{x^3} = 3(1 - \log_2 x),$$

$$\log_2 \frac{32}{x^4} = 5 - 2 \log_2 x,$$

$$\log_{0,5} x = -\log_2 x,$$

поэтому исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$\log_2^4 x - 13 \log_2^2 x + 36 < 0.$$

Положив $\log_2 x = t$, после разложения на множители получим неравенство $(t+3)(t+2)(t-2)(t-3) < 0$. Его решение (см. рис. 4): $-3 < t < -2$, $2 < t < 3$. Вернемся к исходной переменной: $-3 < \log_2 x < -2$, $2 < \log_2 x < 3$, откуда: $0,125 < x < 0,25$ и $4 < x < 8$.

Задача 14 (Московский институт электронного машиностроения, 1974). Решить неравенство

$$0,3 \log_{0,25} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2} > 1.$$

По теореме 3 данное неравенство

(в ОДЗ) эквивалентно неравенству

$$\log_{0,25} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2} < 0,$$

а последнее — неравенству $\log_2 \frac{3x+6}{x^2+2} > 1$,

откуда $\frac{3x+6}{x^2+2} > 2$. Умножив обе части на x^2+2 (это выражение положительно при любых действительных x), получим $2x^2 - 3x - 2 < 0$ или $2(x+0,5)(x-2) < 0$, откуда $-0,5 < x < 2$.

При решении неравенств, содержащих в основании логарифма или степени параметры или неизвестные, необходимо отдельно рассматривать интервалы $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ значений основания.

Задача 15 (Московский институт инженеров геодезии, аэрофото съемки и картографии, 1975). Решить неравенство

$$(x^2 - x + 2)^{\log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1}} > 1.$$

Поскольку основание степени $x^2 - x + 2$ положительно при любом действительном значении x (проверьте!), то данное неравенство эквивалентно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2 - x + 2 < 1, \\ \log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1} < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x + 2 > 1, \\ \log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1} > 0. \end{cases}$$

На множестве всех действительных чисел неравенство $x^2 - x + 2 < 1$ не имеет решений, а неравенство $x^2 - x + 2 > 1$ удовлетворяется при любом x (докажите!). Поэтому первая система решений не имеет, а вторая эквивалентна неравенству $\log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1} > 0$, т. е. $0 < \frac{2x-3}{x+1} < 1$.

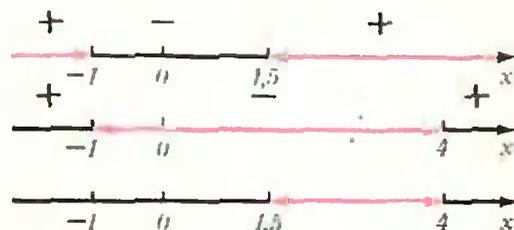


Рис. 5.

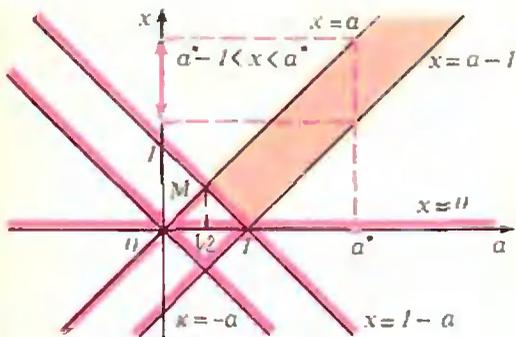


Рис. 6.

Преобразовав эти неравенства в систему

$$\begin{cases} (x+1)(x-1,5) > 0, \\ (x+1)(x-4) < 0, \end{cases}$$

решим ее методом интервалов (рис. 5).
Ответ: $1,5 < x < 4$.

В заключение рассмотрим решение неравенства с параметром.

Задача 16 (МИЭТ, 1975). *Найти все значения параметра a , при которых неравенство*

$\log_{a+1}|x(a-x)| < \log_{a-x}x$
имеет хотя бы одно решение.

В области допустимых значений неизвестного x и параметра a , определяемой условиями $x > 0$, $a+x > 0$, $a-x > 0$, $a+x \neq 1$, неравенство эквивалентно следующему: $\log_{a+x}(a-x) < 0$. Последнее неравенство с учетом ОДЗ эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x > -a, \\ x < a, \\ a+x > 1, \\ a-x < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x > -a, \\ x < a, \\ a+x < 1, \\ a-x > 1. \end{cases}$$

Проведем в прямоугольной системе координат (рис. 6) прямые $x=0$, $x=-a$, $x=a$, $x=1-a$ и $x=a-1$. Каждая прямая делит координатную плоскость на две полуплоскости, в одной из которых соответствующее неравенство выполняется, а в другой полуплоскости и на самой прямой не выполняется. Оче-

видно, первой системе удовлетворяют координаты точек, заполняющих на рисунке 6 закрашенную полосу и не лежащих на ее границах. Наименьшую координату $a = 1/2$ среди точек, ограничивающих эту область, имеет точка M , следовательно, неравенство имеет решения при $a > 1/2$. Эти решения (хотя их находить по условию не требуется) ясны из рисунка 6: $1-a < x < a$ при $1/2 < a \leq 1$ и $a-1 < x < a$ при $a > 1$.

Предлагаем читателям самостоятельно рассмотреть вторую систему и убедиться в том, что она решений не имеет.

Упражнения

Решить следующие уравнения и неравенства.

1 (МАМИ, 1974). $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2-3} < \left(\frac{1}{5}\right)^7$.

2 (МТИМПИ, 1974). $9^x + 15^x = 25^x$.

3 (МАМИ, 1974). $\log_9 x + \log_9 x^2 = \frac{\log_9 x}{\log_9 x^2}$.

4 (МИНГАВК, 1975). $\lg(3\sqrt[3]{x-1} - 2^4 - \sqrt{x+1}) - 2 = \frac{1}{4} \lg 16 - \lg 4\sqrt{x+0,25}$.

5 (МИТХТ, 1974). При каких значениях a уравнение $x^2 - (2^a - 1)x - 3(4^{a-1} - 2^{a-2}) = 0$ имеет действительные корни?

6 (Станкин, 1975). $2(2\sqrt{x} + 3) \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{4^2}} = 0$.

7 (МИФИ, 1974). $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

8 (МАИ, 1974). $\log_{\sqrt{5-2x}}(x-1) - |x-2| = \log_{5-2x}(3|x-2| - 3x + 7)$.

9 (МИФИ, 1974). $x^2 2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^1 + \sqrt{2x+1}^2 + x^2 \cdot 2^{x-2}$.

10 (МАТИ, 1974). $\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-7}{2x-4} > 0$.

11 (МИРЭА, 1974). $\log_{\frac{5}{2}} \left(4^{x^2+4x} + 2^{x^2+4x-1} - \frac{1}{2} \right) < 1$.

А. Диденко, Г. Дубровский

Применение диаграмм тепловых процессов

В главе «Термодинамика» школьного курса физики имеется много задач, в которых рассматривается поведение простейшей *термодинамической системы* — идеального газа. Обычно эту систему представляют как достаточно разреженный газ, заключенный в цилиндре под поршнем (рис. 1). При этом термодинамика не рассматривает движения системы как целого и не учитывает потенциальной энергии системы во внешних силовых полях.

Напомним, что состояние идеального газа характеризуется следующими параметрами: давлением p , объемом V , температурой T , массой m и молярной массой μ .

Говорят, что система находится в *термодинамическом равновесии*, ес-

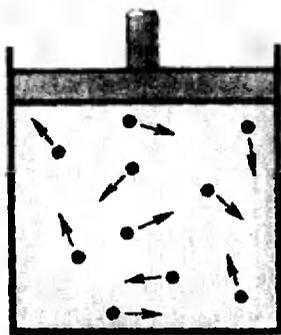


Рис. 1. Простейшая термодинамическая система.

ли каждый параметр имеет одно и то же значение в любой точке объема системы. Например, газ, предоставленный самому себе, всегда распределяется равномерно по всему объему, так что давление всюду одно и то же. Такое состояние и соответствует равновесному. Если хотя бы один из параметров изменяется от точки к точке, то состояние системы неравновесное. В системе возможны различные процессы: диффузия, теплопередача и т. п. Равновесное состояние отличается от неравновесного тем, что в равновесном состоянии система может находиться сколь угодно долго, если, конечно, не меняются внешние условия.

Под влиянием внешних воздействий система переходит из одного состояния в другое. Изменение состояния системы называют *процессом*: процесс всегда связан с нарушением равновесия. Термодинамика рассматривает такие процессы, в которых начальное и конечное состояния являются равновесными. Но промежуточные состояния могут быть и неравновесными. Мы будем рассматривать наиболее простой случай, когда процесс происходит бесконечно медленно, так что состояние системы в любой момент можно считать равновесным. В таком случае говорят, что в системе происходит *равновесный процесс*, который представляет собой непрерывную последовательность равновесных состояний.

Понятия «равновесное состояние» и «равновесный процесс» являются, конечно, идеализацией, но идеализацией очень удобной для количественного анализа поведения системы.

Изменение одного из параметров влечет за собой изменение остальных параметров, поскольку все они связаны друг с другом. Взаимная зависимость между отдельными параметрами устанавливается экспериментально. Формулы, обобщающие результаты экспериментов, называют уравнением состояния системы. Для

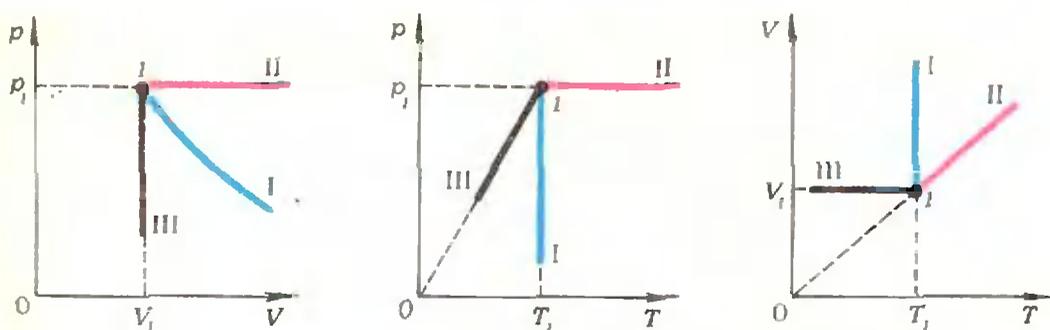


Рис. 2. Точка I — начальное состояние газа; I — график изотермического процесса; II — график изобарического процесса; III — график изохорического процесса.

газов уравнение состояния (уравнение Клапейрона — Менделеева) имеет вид

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (1)$$

(R — универсальная газовая постоянная).

Равновесные состояния и равновесные процессы можно изображать графически. Для этого на двух взаимно перпендикулярных осях откладывают значения каких-либо двух параметров, например, давления p и объема V , объема V и температуры T , давления p и температуры T . Таким образом получают так называемые диаграммы состояния системы. На любой из диаграмм (p, V), (V, T) или (p, T) каждое равновесное состояние обозначается точкой, а равновесный процесс — линией.

В школьном курсе подробно рассматриваются три частных процесса:

изотермический ($T = \text{const}$), изобарический ($p = \text{const}$) и изохорический ($V = \text{const}$) процессы, происходящие с газом неизменного химического состава ($\mu = \text{const}$) и постоянной массы ($m = \text{const}$). Соответствующие графики показаны на рисунке 2.

Но нельзя забывать, что в общем случае могут изменяться все без исключения параметры, в том числе m и μ . Пусть, например, газ переходит из состояния I (с параметрами $p_1, V_1, T_1, m_1, \mu_1$) в состояние 2 (с параметрами $p_2, V_2, T_2, m_2, \mu_2$). Вообще говоря, этот переход может быть осуществлен бесконечным числом способов, в зависимости от того, как меняются отдельные параметры. Например, на рисунке 3 изображены графики одного и того же процесса $I \rightarrow 2$ на различных диаграммах. Подумайте, как при этом изменяются масса и молярная масса газа.

Часто предметом беседы экзаменатора с абитуриентом становятся круговые процессы, или циклы. Цикл — это такой процесс, для которого совпадают начальное и конечное состоя-

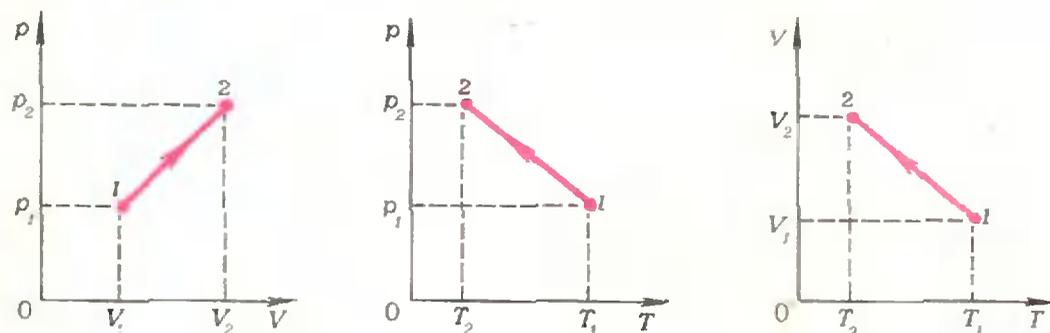


Рис. 3.

ния. В качестве примера разберем такую задачу.

Задача 1. Как будет выглядеть график кругового процесса $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ (рис. 4) на диаграмме (p, V) ? Масса газа и его химический состав остаются неизменными.

Прежде всего «расшифруем» график, приведенный на диаграмме (p, T) , и выясним, какие процессы проводились над газом?

На участке $1 \rightarrow 2$ давление неизменно и имеет величину p_1 , а температура увеличивается от значения T_1 до значения T_2 . Изменяться может лишь один параметр — объем V . Следовательно, на первом этапе объем изобарически увеличивается от V_1 до V_2 . На диаграмме (p, V) этот процесс изобразится прямой $1 \rightarrow 2$, параллельной оси V (рис. 5).

На участке $2 \rightarrow 3$ давление изменяется прямо пропорционально температуре (прямая $2 \rightarrow 3$ проходит через начало координат). Это указывает на то, что на этом участке объем газа не изменяется: $V_2 = V_3$. На диаграмме (p, V) процесс $2 \rightarrow 3$ изобразится вертикальным отрезком, идущим вниз, так как давление уменьшается.

Процесс $3 \rightarrow 4$ — изобарический ($p = p_3$). Температура, а следовательно, и объем убывают. Процесс $3 \rightarrow 4$ на диаграмме (p, V) будет изображаться отрезком, параллельным оси V . Но пока остается неизвестным, где заканчивается процесс $3 \rightarrow 4$, так как неизвестен объем V_4 . Поэтому предварительно исследуем процесс $4 \rightarrow 1$. Из рисунка 4 видно, что в процессе $4 \rightarrow 1$ давление растет прямо пропорционально абсолютной температуре. А это означает, что процесс происходит при $V = \text{const}$, и $V_4 = V_1$. Окончательно график цикла $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ на диаграмме (p, V) имеет вид, показанный на рисунке 5.

Умение строить графики круговых процессов иногда существенно облегчает количественные оценки некоторых характеристик этих процессов. Поясним это на двух конкретных задачах.

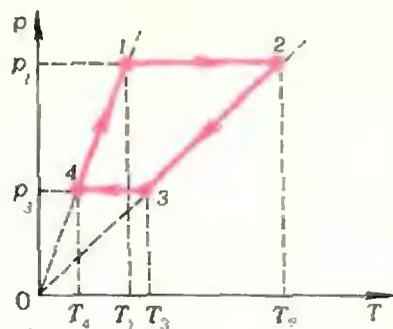


Рис. 4.

Задача 2. Над газом проводят два круговых процесса: процесс $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ и процесс $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. Графики этих процессов, представленные в координатах (V, T) , изображены на рисунке 6. В каком случае газ совершит большую работу?

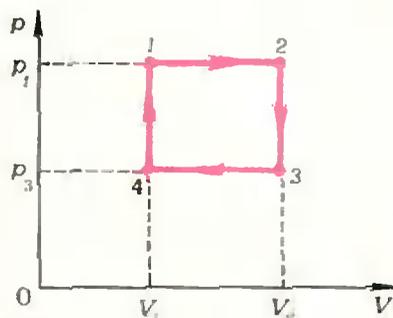


Рис. 5.

Решение этой задачи может быть сравнительно простым, если воспользоваться известным свойством диаграммы (p, V) : работа, совершенная газом за цикл, пропорциональна площади фигуры, ограниченной графиком этого процесса. Значит, нам не-

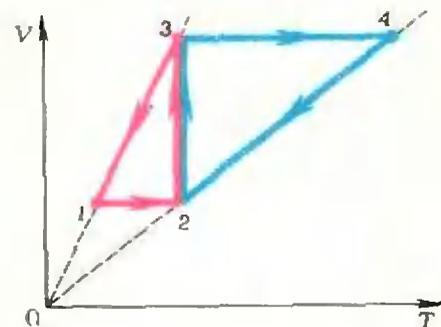


Рис. 6.

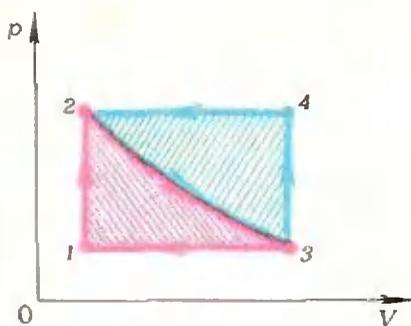


Рис. 7.

обходимо построить графики заданных круговых процессов на диаграмме (p, V) .

Нетрудно видеть, что цикл $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ состоит из процесса изохорического нагревания $1 \rightarrow 2$, изотермического расширения $2 \rightarrow 3$ и изобари-

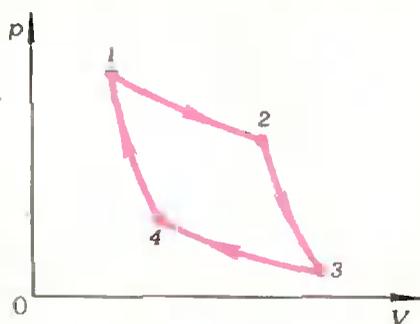


Рис. 8.

ческого охлаждения $3 \rightarrow 4$. В координатах (p, V) он принимает вид, показанный на рисунке 7.

Цикл $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ состоит из процессов изохорического нагревания $3 \rightarrow 4$, изобарического охлаждения $4 \rightarrow 2$ и изотермического расширения $2 \rightarrow 3$. Так как процессы $2 \rightarrow 3$ для обоих циклов совпадают, то разумно графики зависимости $p(V)$ для них изобразить на одних осях координат (рис. 7).

Совершенно очевидно, что площадь фигуры $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ меньше площади фигуры $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. Отсюда непосредственно следует, что по модулю работа газа A в первом процессе меньше, чем во втором, т. е. $|A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1}| < |A_{3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3}|$. Но нельзя забывать, что работа, совершаемая газом, яв-

ляется алгебраической величиной: если процесс происходит с увеличением объема, то $A > 0$, а если объем системы уменьшается, то $A < 0$. Для круговых процессов можно сформулировать такое правило определения знака работы, совершенной газом: если обход контура кругового процесса совершается по часовой стрелке, то $A > 0$; если же обход контура происходит против часовой стрелки, то $A < 0$. Применяв это правило к данной задаче, получаем

$$A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1} > 0 \text{ и } A_{3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3} < 0.$$

Окончательно ответ задачи можно дать такой:

$$A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1} > A_{3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3},$$

но при этом

$$|A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1}| < |A_{3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3}|.$$

Задача 3. Газ совершает цикл $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ (рис. 8), состоящий из двух изотерм ($1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 4$) и двух адиабат ($2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$). Какие из этих процессов происходят при подведении теплоты к системе, а какие требуют отвода теплоты?

Учащиеся редко дают правильный ответ на этот вопрос. Наиболее распространенная ошибка заключается в том, что отождествляются два различных понятия: температура и количество теплоты. При этом утверждается, что если температура неизменна (процессы $1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 4$), то теплоту не нужно ни подводить, ни отводить. Это, конечно, неверно.

Для решения задачи воспользуемся первым законом термодинамики:

$$Q = \Delta U + A. \quad (2)$$

Здесь Q — количество теплоты, переданное системе, ΔU — изменение внутренней энергии системы и A — работа, совершенная системой.

Внутренняя энергия идеального газа зависит лишь от температуры (конечно, при условии, что $m = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$). Поэтому для изотермического процесса $1 \rightarrow 2$ изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$, и равенство (2) принимает вид

$$Q = A.$$

Так как объем системы увеличивается

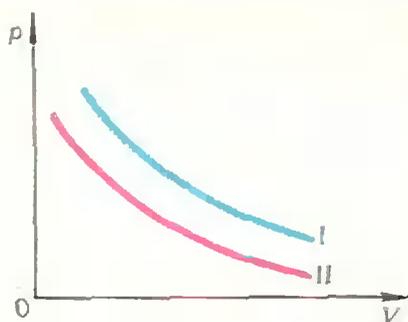


Рис. 9.

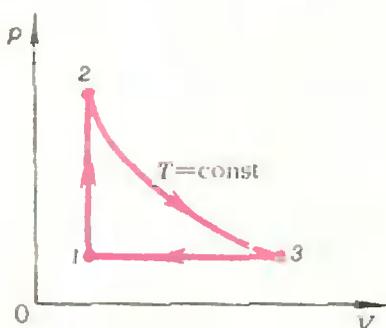


Рис. 10.

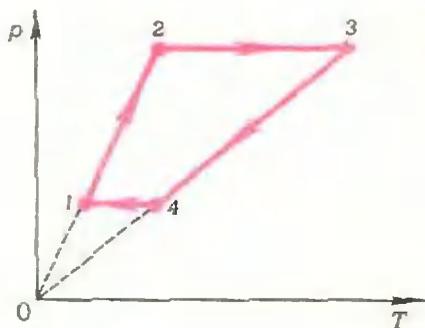


Рис. 11.

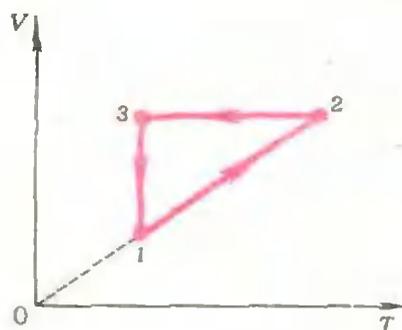


Рис. 12.

ется, то $A > 0$. Следовательно, и $Q > 0$, то есть к системе нужно подвести некоторое количество теплоты.

За счет подведенной теплоты система и совершает работу в процессе изотермического расширения. Аналогичные рассуждения можно провести для процесса изотермического сжатия $3 \rightarrow 4$. Но в этом случае объем системы уменьшается, поэтому $A < 0$, и $Q < 0$: теплоту нужно от системы отводить.

Процессы $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$ адиабатные. По определению адиабатный процесс — это процесс без теплообмена с окружающей средой, то есть $Q = 0$. Следовательно, на участках $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$ теплота ни подводится к системе, ни отводится от нее.

Заметим, что адибаты на диаграмме (p, V) идут круче, чем изотермы. Это легко понять, если снова воспользоваться первым законом термодинамики, записанным для адиабатных процессов:

$$\Delta U + A = 0.$$

При адиабатном расширении (процесс $2 \rightarrow 3$) система совершает работу за счет внутренней энергии:

$$A > 0, \text{ и } \Delta U < 0.$$

Внутренняя энергия газа уменьшается и температура системы понижается (система переходит с изотермы $1 \rightarrow 2$ на изотерму $4 \rightarrow 3$, соответствующую более низкой температуре). При адиабатном сжатии (процесс $4 \rightarrow 1$)

$$A < 0, \text{ и } \Delta U > 0.$$

Внутренняя энергия увеличивается, температура газа повышается.

Упражнения

1. На диаграмме (рис. 9) изображены изотермы для двух различных систем идеального газа. Чем различаются параметры этих систем?

2. На рисунке 10 дан график изменения состояния идеального газа в координатах (p, V) . Представить этот круговой процесс на диаграмме (V, T) .

3. Над газом, масса которого m , а молярная масса μ , производят круговой процесс $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, изображенный на рисунке 11. Температуры газа в состояниях 1, 2, 3 и 4 равны соответственно T_1 , T_2 , T_3 и T_4 . Определить работу, совершенную газом за цикл.

4. Изменение состояния газа при круговом процессе показано на диаграмме (V, T) (рис. 12). В каких процессах газ получает теплоту, а в каких отдает ее? Изобразите процесс на диаграмме (p, T) .

Московский государственный университет

им М. В. Ломоносова

В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и примеры задач устного экзамена по физике, предлагавшихся поступающим в МГУ в 1975 году. Экзамены на всех естественных факультетах проводятся в июле.

Математика

Механико-математический факультет

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 4x + 6) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 4x + 6) \geq 8.$$

2. Найти все пары чисел (x, y) , удовлетворяющие условию $y \geq 0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + (y+1)^2 - 32 = 31 \cdot 2^{x^2 + (y+1)^2}, \\ \cos[\pi(x^2 + y^2)] = 1. \end{cases}$$

3. Два равных ромба $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$) и $APQR$ ($AP \parallel QR$, $AR \parallel PQ$) имеют общую вершину A и лежат в одной плоскости. Известно, что $\sphericalangle BAD = \sphericalangle PAR = \alpha < \frac{\pi}{2}$, точка R лежит внутри ромба

$ABCD$ и угол RAD равен β . Стороны BC и QR пересекаются в точке K . Найти величину угла BAK .

4. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен 60° . Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $MN = 5$, касающаяся шара в точке, удаленной на

равные расстояния от точек M и N , пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D . Найти длину отрезка SD .

5. Без помощи таблицы найти все значения x в промежутке $-4 < x < -2,5$, удовлетворяющие равенству

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}}\left(\sin x - \cos 6x + \frac{2}{3}\right) &= \\ &= -\log_{\frac{1}{5}}\left(\sin 3x - \cos 8x + \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Решить неравенство

$$|x^2 + 4x - 5 - 2x + 3| > 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x + \sin^2 y) = 0, \\ |x - 3\sin^2 y| = -2. \end{cases}$$

3. Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, пересекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определять основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d , причем $c < d$.

4. Два грузовика доставили со склада на стройку одно и то же количество кирпича и одно и то же количество цемента, причем каждый из них сначала доставлял кирпич, а затем цемент, перевозя за каждую поездку груз одного и того же веса. Первый грузовик начал работу на 40 минут раньше, а закончил на 40 минут позже второго. При этом интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был не более 20 минут.

Если бы первый грузовик начал работу на 1 час 5 минут раньше второго, уменьшив свою производительность на 10%, а производительность второго грузовика не изменилась, то второй грузовик закончил бы работу на 55 минут раньше первого, а интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был бы не менее 25 минут.

Если бы производительность первого грузовика уменьшилась на 2 тонны в час, а производительность второго грузовика не изменилась, то первый грузовик затратил бы на выполнение всей работы в два раза больше времени, чем второй грузовик на доставку кирпича.

Сколько всего цемента было доставлено на стройку?

5. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещивающиеся ребра AC и BD и AD и BC этой пирамиды перпендикулярны, ребра AB и CD равны, все ребра пирамиды касаются шара радиуса r . Найти площадь грани ABC .

Физический факультет

1. Решить уравнение $2\sin(x+3) \cdot \cos(4x-1) + \sin(3x-4) = 0$.
 2. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{6}}(x+3)$
- $$6 \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{2}\right) \log_4(x^2+5x+12)$$
3. Решить неравенство $(2-5^x)(7x^2-10x+3) < 0$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол ACB — прямой. Пусть E — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной AC ; точка D — середина стороны AB , O — точка пересечения отрезков BE и CD . Через точку O проведен перпендикуляр к прямой BO до пересечения со стороной BC в точке F . Известно, что $FC = b$, $OC = \frac{3b}{2}$. Найти площадь треугольника ABC .

5. Два равных треугольника KLM и KNL имеют общую сторону KL , $\angle KLM = \angle LKN = \pi/3$, $KL = a$, $LM = KN = 6a$. Плоскости KLM и KNL взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезков LM и KN в их серединах. Найти его радиус.

Биологический факультет

1. Двое рабочих в первый день работали одно и то же время, обрабатывая одинаковые детали. При этом первый рабочий обработал на 30 деталей больше, чем второй. На следующий день первый рабочий увеличил производительность труда в 1,2 раза и закончил работу на 1 час раньше, чем в первый день. Второй рабочий во второй день обрабатывал на 5 деталей в час меньше, чем в первый день, и проработал в $7/6$ раза дольше, чем в первый день. Известно, что во второй день каждый из рабочих обработал по 420 деталей. Сколько деталей в час обрабатывал второй рабочий в первый день?

2. Найти все значения параметра p , при которых квадратное уравнение

$$(4x)^2 + \left(2 \frac{1}{p} + 4 - 24\right)x + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение.

3. В окружность вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$, причем его сторона AB является диаметром окружности. Диагонали AC и BD пересекаются в точке M . Известно,

что $BC = 3$, $CM = \frac{3}{4}$, а площадь

треугольника ABC втрое больше площади треугольника ACD . Найти длину отрезка AM .

4. Решить уравнение $|\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x| = 1 + 2\cos x + \cos 2x$.

5. Найти все целые числа n , удовлетворяющие неравенству

$$\log \left(2 \lg \frac{\pi}{5} - n + 13 \right) \left(\frac{\sqrt{16-n}}{\sqrt{n+11}+1} \right) \leq 0.$$

Химический факультет

1. Решить неравенство

$$9 \frac{3}{2} x + \sqrt{x} < 8 \cdot 3^{2x+3} \sqrt{x} + 3^{x+4} \sqrt{x} + 2.$$

2. Две шахты соревновались в течение первого квартала. Мартовская добыча второй шахты была на 400 т меньше февральской добычи первой шахты. Январская добыча первой шахты равнялась ее же мартовской добыче и равнялась февральской добыче второй шахты. По итогам первых двух месяцев добыча первой шахты оказалась меньше добычи второй шахты на 1000 т. Что больше и на сколько: январская добыча первой шахты или январская добыча второй шахты? Известно, что если бы январская добыча второй шахты равнялась ее же мартовской добыче, то добыча второй шахты за январь, февраль и март месяца оказалась бы больше добычи первой шахты за эти же месяцы на 1300 т.

3. В треугольнике ABC косинус угла ACB равен $\frac{2}{3}$, $AC = 3$, $BC = 9$. Точка D лежит на стороне BC так, что $CD = 3$. Найти отношение площади круга, описанного около треугольника ACD , к площади круга, вписанного в треугольник ABD .

4. Шар радиуса R касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найти объем пирамиды.

5. Найти все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} \sin(3a - 3y) + 3 \sin x = 0, \\ 2 \log_4(a - y) + 2 \log_4(2 \sqrt{y}) = \\ = \log_2 \sqrt{y} + 3 \log_8(2x) \end{cases}$$

имеет четное число решений.

Факультет почвоведения

1. Два экскаватора должны вырыть три одинаковых котлована. Если они будут работать вместе, то выкопят их за два дня. Первый экскаватор может вырыть один такой котлован на день быстрее, чем второй экскаватор. В один из дней первый экскаватор работал полдня, а второй работал весь день. Какая часть всей работы была выполнена за этот день?

2. Найти все значения переменной x , при которых выражение $3 + \sin^2 2x - 2 \sin^2 x$ достигает своего максимального значения.

3. Решить уравнение

$$x + 27 \frac{5}{2} \left| \log_9 \sqrt[3]{\sqrt{x}} \right| = \frac{[10]}{3}.$$

4. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трех

сторон параллелограмма каждая. Радиус одной окружности равен 1. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.

5. Доказать без помощи таблиц, что

$$\log_2 7 + \left(3 + \cos \frac{15}{7}\right) \log_2 2 < 4.$$

Геологический факультет

1. Решить уравнение $\cos 4x + 6 = 7 \cos 2x$.

2. Экскаватор роет котлован. После того как было вынуто 20 м^3 грунта, производительность экскаватора снизилась на $5 \text{ м}^3/\text{ч}$. Найти первоначальную производительность экскаватора, если через 8 часов после начала работы было вынуто 50 м^3 грунта.

3. Решить неравенство

$$2 \log_{(2x-1)} 10 + \log_{10} |2x-1|^2 < \log_2 8.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC известны стороны: $AC = 4 \text{ см}$, $AB = BC = 6 \text{ см}$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D . Через точку D проведена окружность, касающаяся стороны AC в ее середине и пересекающая отрезок AD в точке E . Найти площадь треугольника DEC .

5. Решить неравенство

$$\sqrt{(x-5)(-x+7)} + 1 > -\sqrt{x-5} + \sqrt{-x+7}.$$

Географический факультет

1. Человек в лодке начал грести против течения быстрой реки. Однако через 4 минуты лодка оказалась на 80 м ниже по течению. Развернув ее, он перестал грести, и, пока он отдыхал, лодку снесло на 40 м. Затем он принялся грести по течению, причем лодка двигалась относительно воды с той же скоростью, как и в первые 4 минуты, и прошла относительно берега еще 40 м. В целом после разворота лодки прошло 100 секунд. Какова скорость течения?

2. Решить уравнение

$$\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{4} - \cos^2 \frac{x}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$\begin{aligned} 5^{\log_3 \frac{1}{3}(x-1)} &= \\ &= 25^{\log_5 \sqrt{x^2-1}} \cdot 25^{\log_5 \frac{x^2-1}{4x^2-7}}. \end{aligned}$$

4. В треугольнике ABC биссектриса AN пересекает высоты BP и CT в точках K и M соответственно, причем эти точки лежат

внутри треугольника. Известно, что $BK : KP = 2$ и $MT : KP = \frac{3}{2}$. Найти отношение площади треугольника PBC к площади описанного около этого треугольника круга.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} \frac{7-y}{3}, \\ 3x + 4 \log \frac{3x}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\pi^3 x}{27}} = \\ = 2 \log \sqrt{\frac{3x}{\pi}} \left(\frac{3x^2}{\pi}\right) - 36 - \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} \sqrt[4]{y^3} \end{cases}$$

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. На подвижный вал радиуса $R = 10 \text{ см}$ намотана веревка, к концу которой привязан груз. Под действием тяжести груза веревка разматывается, и груз, двигаясь равноускоренно без начальной скорости, опускается на $h = 1 \text{ м}$ за время $t = 5 \text{ сек}$. Найти центростремительное ускорение точек обода вала в тот момент времени, когда груз находится в середине пути. Вербка не скользит по валу.

2. Тело брошено под углом α к горизонту. При каком минимальном угле α_{\min} кинетическая энергия тела может сравняться с его потенциальной энергией (отсчитываемой от точки бросания)?

3. Дистиллятор имеет две нагревательные спирали. Одна из них обеспечивает производительность $q_1 = 0,2 \text{ кг/мин}$ дистиллированной воды, другая — $q_2 = 0,4 \text{ кг/мин}$. Во сколько раз отличаются производительности дистиллятора при параллельном и последовательном соединении этих спиралей? Напряжение сети постоянно, тепловых потерь не учитывать.

4. Катушка диаметром $d = 10 \text{ см}$ помещена в магнитное поле с индукцией $B = 1,256 \cdot 10^{-2} \text{ тл}$ так, что ее ось совпадает с направлением линий магнитной индукции. Катушка содержит $N = 500$ витков и имеет сопротивление $R = 10 \text{ ом}$. Найти заряд, который пройдет через обмотку катушки, если магнитное поле равномерно убывает до нуля.

5. В зрительном зале кинотеатра изображение кадра размером $18 \times 24 \text{ мм}$ должно быть точно уложено на экран размером $3 \times 4 \text{ м}$. Каково должно быть фокусное расстояние объектива, если расстояние от кадра до экрана $L = 16 \text{ м}$?

6. Две собирательные линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 12$ см и $F_2 = 7$ см имеют общую оптическую ось и находятся на расстоянии l друг от друга. Предмет длины $a = 2$ см находится в фокальной плоскости первой линзы на расстоянии $F_1 + l$ от второй. Найти размер изображения.

Физический факультет

1. Невесомый стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к стержню (рис. 1). На стержне с одной стороны от оси укреплены равные грузы с массой m каждый на расстояниях l и $l/2$ от точки O . С другой стороны на стержне укреплен груз с массой $2m$ на расстоянии $l/2$ от оси. В начальный момент стержень расположен горизонтально и опущен. Определить линейную скорость среднего груза в момент прохождения стержнем положения равновесия.

2. В объеме V содержится влажный воздух при относительной влажности ϵ %, температуре T_0 и давлении p_0 . Масса влажного воздуха M . Определить давление насыщающего водяного пара при этой температуре.

3. Найти емкость последовательного соединения двух конденсаторов, изображенных на рисунке 2, если известны: S — площадь обкладки конденсатора, d — расстояние между обкладками каждого из конденсаторов, ϵ — диэлектрическая проницаемость изолятора, заполняющего половину конденсатора (краевые эффекты во внимание не принимать).

4. Равнобедренная стеклянная призма с малыми преломляющими углами α помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально на ее основание (рис. 3). Показатель преломления стекла $n = 1,57$; размер основания $2d = 5$ см. Найти величину преломляющего угла α , если в середине экрана, расположенного на расстоянии $L = 100$ см от призмы, наблюдается неосвещенный участок экрана шириной $2a = 1$ см.

5. Параллельный пучок света направляется собирающей линзой на катод фотоэлемента. Фокусное расстояние линзы F значительно больше ее диаметра D . Взаимное расположение линзы и фотоэлемента таково, что круглый фотокатод, диаметр которого d , в точности перекрывает световой поток. При этом гальванометр в цепи фотоэлемента показывает ток I . Какой ток покажет гальванометр, если между линзой и фотоэлементом, не меняя их положения, поставить плоскопараллельную пластинку толщиной H с показателем преломления n ? (Потери света при отражении и поглощении не учитывать.)

Химический факультет

1. Шарик подброшен вертикально вверх с начальной скоростью $v = 4$ м/сек. В тот момент, когда он достиг верхней точки, сци-



Рис. 1.

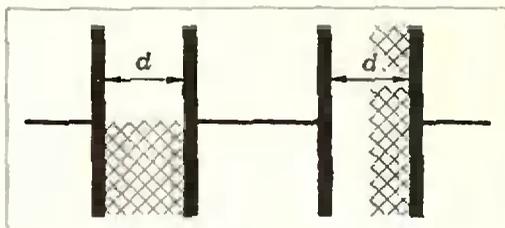


Рис. 2.

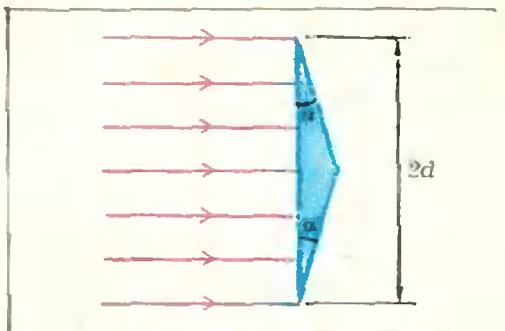


Рис. 3.

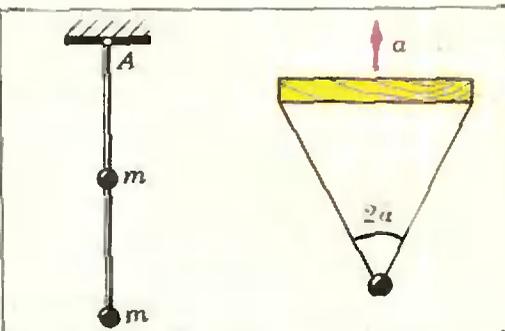


Рис. 4.

Рис. 5.

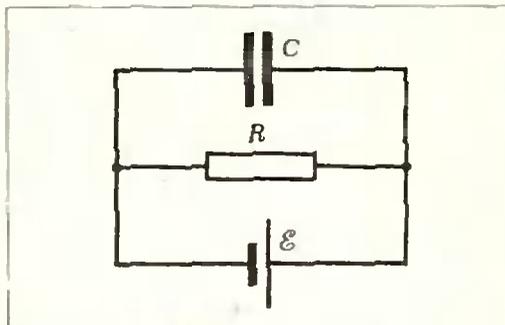


Рис. 6.

зу из той же точки точно с такой же скоростью подбросили еще один шарик. На какой высоте они встретятся?

2. На невесомом стержне длины $l = 75$ см укреплены две равные массы m — одна на конце, другая посередине стержня (рис. 4). Стержень может вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки закрепления A . Какую горизонтальную скорость нужно сообщить нижнему концу стержня, чтобы стержень отклонился до горизонтального положения?

3. В воду массы $m_B = 2$ кг при температуре $t_B = 17^\circ\text{C}$ опускают лед, предварительно охлажденный до температуры $t_D = -10^\circ\text{C}$. Какое количество льда необходимо, чтобы получить при равновесии воду с температурой $t = 7^\circ\text{C}$? Потери тепла не учитывать. Удельная теплоемкость воды $c_B = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град); удельная теплоемкость льда $c_D = 2,1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град); удельная теплота плавления льда $r = 3,3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

4. В вершинах квадрата, стороны которого равны l , расположены одинаковые положительные точечные заряды q . Какую работу надо совершить, чтобы переместить отрицательный точечный заряд q_1 из центра квадрата на середину одной из сторон?

5. Электрическое поле создается точечным положительным зарядом Q . Потенциалы точек A и B равны 30 в и 20 в соответственно. Найти потенциал точки C , лежащей посередине между точками A и B (прямая AB проходит через заряд).

6. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оптической оси. За линзой перпендикулярно к оси помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно

поместить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельными? Фокусное расстояние линзы F .

Биологический, географический, геологический факультеты и факультет почвоведения

1. Шарик массы m прикреплен двумя нитями к доске (рис. 5). Угол между нитями 2α . Какими будут натяжения каждой нити, если доска станет двигаться вверх с ускорением a ?

2. Засасывающая камера поршневого насоса имеет объем $V_0 = 0,8$ л. Во сколько раз уменьшается давление при каждом ходе, если воздух откачивается из баллона объемом $V = 4$ л?

3. В кастрюлю налили холодной воды с температурой $t_1 = 10^\circ\text{C}$ и поставили ее на электроплитку. Через время $\tau_1 = 5$ мин вода закипела. Через какое время τ_2 после начала кипения вода полностью испарится? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \times 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Кипение происходит в открытой кастрюле при нормальном давлении.

4. Найти разность потенциалов на конденсаторе (рис. 6), если известно, что при коротком замыкании цепи (в обход сопротивления R) ток через батарею возрастает в три раза. Э. д. с. батареи $\mathcal{E} = 12$ в.

5. Расстояние от предмета до собирающей линзы в 5 раз больше фокусного расстояния линзы. Во сколько раз изображение будет меньше предмета?

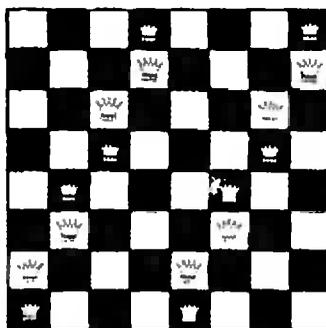
Ю. Нестеренко, М. Потапов,
А. Склякин, Н. Тягунина

Ферзи на доске

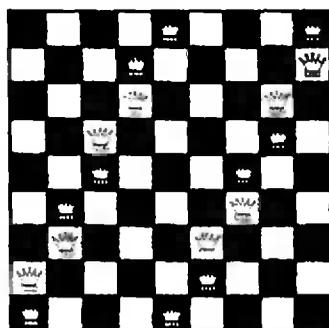
В статье «Шахматно-математические задачи С. Лойда» («Квант», 1975, № 6) была сформулирована следующая нерешенная задача.

На доске $n \times n$ расставить $2n$ ферзей так, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло не более двух из них.

В статье приводилось решение Лойда для обычной шахматной доски 8×8 . Вскоре после опубликования статьи в редакцию пришли сразу два письма — от уче-



ницы 10 класса г. Орехово-Зуево Н. Горбатовой и выпускника 344-й школы г. Ленинграда В. Бровкина. И Наташа, и Володя решили эту задачу, причем метод расстановки ферзей у них один и тот же!



Для четных и нечетных n решения несколько отличаются. На рисунках приведены расстановки ферзей на досках 8×8 и 9×9 , которые легко обобщаются для любых $n > 1$. Убедитесь в этом самостоятельно.

«Квант» для младших школьников



Задачи

1. — У нас в классе 35 человек. И можешь себе представить, каждый дружит ровно с 11 одноклассниками...

— Не может этого быть, — сразу ответил своему другу Витя Иванов, победитель олимпиады.

Почему он так решил?

2. Виктор пускал в ванне пластмассовый кораблик, нагруженный металлическими деталями от конструктора. Вдруг кораблик наклонился, и детали высыпались в воду. Изменился ли уровень воды в ванне?

3. В олимпиаде участвовало 55 школьников. Все они сдали свои работы. При проверке каждой задачи ставилась одна из трех оценок: «+» — задача решена, «-» — задача решалась, но не решена, «0» — задача не решалась. После проверки всех работ оказалось, что ни в каких двух работах не совпало одновременно количество оценок «+» и оценок «-». Какое наименьшее число задач могло быть предложено на олимпиаде?

4. Выезжая за город на прогулку, хозяйка взяла с собой различные продукты. Так как уксус и подсолнечное масло не смешиваются, она наливала обе жидкости в одну бутылку.

Можно ли извлечь немного уксуса для салата отцу и немного масла для салата детям так, чтобы оставшееся масло и остальной уксус остались в бутылке?



Е. Семенов

Ошибки Степы Мошкина

1. Потеряно свойство. К чему это может привести?

Это Петр Иванович вечно придирается! — оправдывался семиклассник Степа Мошкин перед отцом, изучавшим сочную двойку в дневнике сына. — Отвечаю ему, что трапеция — это четырехугольник, две стороны которого параллельны друг другу. Так нет, ему это почему-то не понравилось! Говорит, подумай еще, изобрази трапецию и снова ответь на тот же вопрос. Я сделал рисунок и повторил тот же ответ. А он мне — двойку! За что? Это же несправедливо!...

Что же определил Степа?

Чтобы выяснить, кто прав, откроем Степин учебник геометрии. Трапеция в этом учебнике определяется как четырехугольник, обладающий двумя свойствами:

(1) имеется пара параллельных сторон;

(2) имеется пара непараллельных противоположных сторон.

При таком определении лишь множество T на рисунке 1 состоит из трапеций. Все параллелограммы (множество II на рисунке 1) — не трапеции. Но второе свойство, входящее в определение трапеции, Степа «потерял». А поскольку всякий параллелограмм имеет пару параллельных сторон, то и все параллелограммы нужно отнести к множеству C «Степных трапеций».

Таким образом, Степа вместо множества T получил множество $C = T \cup II$. Исключение какого-либо свойства из определения понятия может привести к новому понятию! В данном случае получено понятие *четырёхугольника, имеющего пару параллельных сторон*. То, что такие четырёхугольники не имеют специального названия, роли не играет.

Как вы уже успели, вероятно, заметить, между множеством T трапеций и множеством C четырехугольников, обладающих свойством (1), существует интересное соотношение: $T \subset C$. Вместо такой записи *) можно сказать: *множество четырехугольников, обладающих свойством (1), шире,*

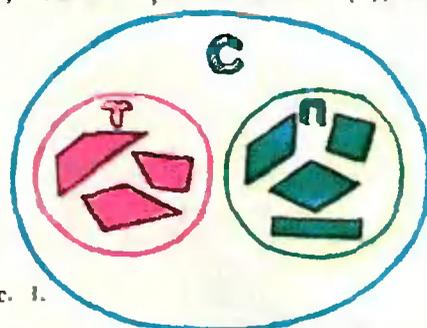


Рис. 1.

чем множество трапеций. То же самое можно выразить и другими словами: *понятие четырехугольника, имеющего пару параллельных сторон, — обобщение понятия трапеции, или: трапеция — частный случай четырехугольника, имеющего пару параллельных сторон.*

Итак, Степина ошибка при определении трапеции теперь всем ясна. Но, пожалуй, не стоило тратить столько времени на ее выяснение, если бы при этом не возникла мысль: а нельзя ли воспользоваться этой ошибкой для чего-либо полезного?

2. Введение нового понятия исключением части свойств имеющегося

Степа пропустил второе свойство в определении трапеции и получил но-

* Здесь и далее знак « \subset » означает не только «включается», но и «не совпадает».

вое понятие. Опустим, теперь уже не по рассеянности и неаккуратности, а преднамеренно, в определении трапеции свойство (1). Тогда получим понятие *четырехугольника, имеющего пару непараллельных противоположных сторон*. Если H — множество таких четырехугольников, то $T \subset H$. Здесь трапеция — частный случай четырехугольника, имеющего пару непараллельных противоположных сторон.

Задача 1. Верны ли утверждения:

а) четырехугольник — обобщение понятия трапеция;

б) трапеция — частный случай четырехугольника?

Ни одно из двух понятий: *четыреугольник, имеющий пару парал-*



Рис. 2.

лельных сторон, и четырехугольник, имеющий пару непараллельных противоположных сторон, — не является обобщением другого, так как $C \not\subset H$, $H \not\subset C$. Пересечение множеств C и H непусто, оно состоит из трапеций. Множества T , C и H изображены так называемыми «кругами Эйлера» на рисунке 2, для наглядности на рисунке приведены изображения четырехугольников, принадлежащих этим множествам.

Задача 2. Рассмотрите следующие пары понятий и в каждом случае укажите, какое из двух понятий — обобщение другого:

- параллелограмм и ромб;
- параллелограмм и прямоугольник;
- параллелограмм и квадрат;
- ромб и квадрат;
- прямоугольник и квадрат;
- ромб и прямоугольник;

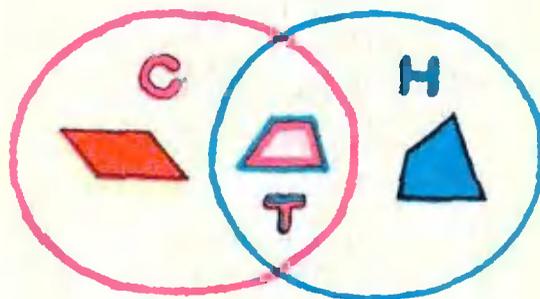
Задача 3. Верны ли высказывания:
в) прямоугольник — частный случай ромба;

б) прямоугольник — обобщение ромба?

Изобразите множества ромбов и прямоугольников кругами Эйлера. Верно ли, что пересечение этих двух множеств пусто?

3. Вторая история со Степой Мошкиным

На следующем уроке Степа был осторожнее. — Свойства терять нельзя! — твердил Степа про себя. — Лучше «переборщить», чем «недоборщить»! И когда Петр Иванович обратился к нему с вопросом, что такое параллелограмм, Степа выпалил: «Параллелограмм — это четырехугольник, обладающий следующими свойствами:



(1) *противоположные стороны параллельны;*

(2) *имеются конгруэнтные стороны;*

(3) *диагонали точкой пересечения делятся пополам;*

(4) *имеется центр симметрии;*

(5) *имеются конгруэнтные углы.*

По мере того как Степа перечислял свойства, в классе росло оживление. Ученики с любопытством смотрели то на Степу, то на Петра Ивановича. Переведя дух, Степа не столь уверенно произнес: «Еще, помнится, *площадь параллелограмма равна произведению длины основания на длину высоты...*» Все засмеялись. Только Петр Иванович был подчеркнута внимателен и серьезен. — Скажи, Степа, получится ли новое понятие, если

из твоего определения опустить последнее свойство параллелограмма, связанное с его площадью? — спросил он.

После обсуждения пришли к выводу, что, пользуясь свойством (1), последнее свойство можно вывести. Следовательно, его исключение из определения к новому понятию не приведет.

Итак, если какое-либо свойство понятия является следствием других свойств, то исключение этого свойства из определения к новому понятию не приводит. Другими словами, исключение некоторого свойства из определения понятия не всегда приводит к обобщению этого понятия.

Поэтому обычно в определение



Рис. 3.

понятия включаются только независимые свойства, т. е. свойства, не являющиеся следствиями других свойств.

А в некоторых случаях бывает удобно от «минимальности» числа свойств, содержащихся в определении, отступить. Например, в учебнике геометрии прямоугольник определен как *параллелограмм, у которого все углы прямые*. Это короткое определение можно сформулировать иначе: *параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник, если он обладает следующими свойствами:*

- (1) $\hat{A} = 90^\circ$;
- (2) $\hat{B} = 90^\circ$;
- (3) $\hat{C} = 90^\circ$;
- (4) $\hat{D} = 90^\circ$.

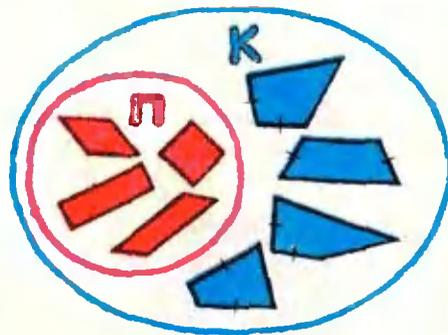
Однако если для параллелограмма выполняется одно из перечисленных четырех свойств, то выполняются и оставшиеся три (докажите это). Поэтому прямоугольник можно определить как *параллелограмм, один из углов которого прямой*.

Задача 4. а) Приведет ли к новому понятию исключение из степенного определения параллелограмма свойств (2)–(5)?

б) Можно ли определить прямоугольник как *четырёхугольник, все углы которого равны*?

Задача 5. Можно ли определение «ромб — параллелограмм, все стороны которого конгруэнтны» заменить другим: «ромб — параллелограмм, имеющий пару конгруэнтных смежных сторон»?

Один из учащихся предложил определить параллелограмм как *четы-*



рёхугольник, обладающий степенным свойством (2) (имеются конгруэнтные стороны). Посмотрим, что из этого получится.

Обозначим через P множество параллелограммов (по определению учебника), через K множество четырёхугольников, имеющих конгруэнтные стороны. В множество K входят и не параллелограммы (например, равнобедренные трапеции). Поэтому $P \subset K$ (эти множества показаны на рисунке 3).

Мы нашли еще один способ получения нового понятия: если свойства, входящие в определение понятия, заменить каким-либо их следствием, то может получиться новое понятие, — обобщение прежнего.

Задача 6. Пусть P — множество параллелограммов, U — множество четырех-

угольников, имеющих пару конгруэнтных углов. Какое высказывание верно:

- а) $P = Y$;
- б) $P \supset Y$;
- в) $P \subset Y$?

Задача 7. Даны два понятия: *параллелограмм* и *четырёхугольник, имеющий центр симметрии*. Является ли одно из них обобщением другого?

Задача 8. Осевая симметрия — это перемещение, обладающее, в частности, следующими свойствами:

- (1) существует прямая, отображающаяся на себя;
- (2) существует неподвижная (отображающаяся на себя) точка;
- (3) существует отображающаяся на себя окружность;
- (4) существует отображающийся на себя треугольник.

а) Заполните таблицу на стр. 73 (в двух строках показано, как это делать).



Рис. 4.

б) Докажите, что понятие *перемещения, обладающего свойством (1)*, является обобщением понятия *перемещения, обладающего свойствами (1) и (2)*.

в) Докажите, что ни одно из двух понятий: *перемещение, обладающее свойством (3)*, и *перемещение, обладающее свойством (4)*, не является обобщением другого.

г) Докажите, что *осевая симметрия* входит в множество *перемещений, обладающих свойствами (1) и (2)*.

4. Новая ошибка Степы Мошкина

Предусмотрительный Петр Иванович включил в письменную работу Степы задание дать определение трапеции. Степа точно помнил, что в определение трапеции входят два свойства. Он помнил также, что «лишние» свойства указывать в определении не надо. Учитывая все это, он быстро

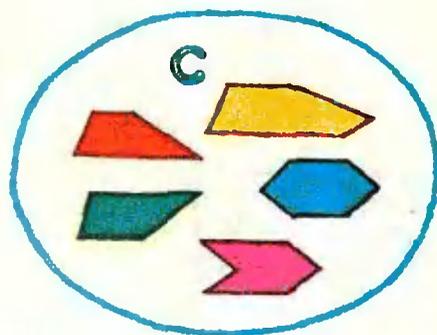
и уверенно написал: *трапеция — это многоугольник, обладающий двумя свойствами:*

(1) *имеется пара параллельных сторон;*

(2) *имеется пара непараллельных сторон.*

Задача 9. Укажите на рисунке 4 множество новых «Степных трапеций». Укажите подмножество этого множества, не содержащее трапеций.

Центральную симметрию с центром O можно определить как *перемещение, при котором точка O неподвижна ($O \rightarrow O$), а всякая другая точка A отображается на такую отличную от A точку A_1 , что $O \in [AA_1]$* . Заменим множество перемещений в этом определении более широким мно-



жеством *отображений плоскости на себя*. Получим новое понятие: *отображение плоскости на себя, при котором некоторая точка O неподвижна, а всякая другая точка A отображается на такую отличную от A точку A_1 , что $O \in [AA_1]$* . В это понятие входит не одна центральная симметрия с центром O , а целое множество отображений, например, любая гомотетия с центром O .

Таким образом, замена множества, в котором задается понятие, более широким может привести к новому понятию. А может и не привести: если в определении прямоугольника как *параллелограмма, все углы которого прямые*, термин «параллелограмм» заменить термином «четырёхугольник», то нового понятия не получится (это

Таблица

Свойства	Обладает ли данное перемещение свойствами, указанными в первом столбце?		
	центральная симметрия	поворот на угол α ($\alpha \neq 180^\circ$)	параллельный перенос на ненулевое расстояние
(1)	Да	Нет	Да
(2)			
(3)			
(4)			
(1) и (2)	Да	Нет	Нет
(1) и (3)			
(1) и (4)			
(2) и (3)			
(2) и (4)			
(3) и (4)			
(1), (2) и (3)			
(1), (2) и (4)			
(1), (3) и (4)			
(2), (3) и (4)			
(1), (2), (3) и (4)			

объясняется тем, что в определении прямоугольника в учебнике содержатся свойства, являющиеся следствиями других входящих в определение свойств).

Задача 10. Получится ли новое понятие, если:

а) в определении ромба как *параллелограмма*, все стороны которого конгруэнтны, термин «параллелограмм» заменить термином «четырёхугольник»;

б) в определении параллелограмма термин «четырёхугольник» заменить термином «многоугольник»?

Итак, вы познакомились с тремя способами введения новых математи-

ческих понятий на основе имеющихся:

а) путем исключения части свойств, содержащихся в определении;

б) путем замены части содержащихся в определении свойств другими;

в) путем расширения множества, в котором задается понятие.

Вы изучили связь между свойствами понятия и множеством, в котором задается понятие, познакомились с требованием минимальности числа свойств, перечисленных в определении, и теперь вам должно быть ясно, как важна осторожность при формулировке определений. Стоит только не указать какое-либо свойство, заменить его другим или указать другое множество, в котором задается понятие, — и может оказаться, что вы определили нечто, чему математики даже не дали специального названия. Не повторяйте ошибок Степы Мошкина!





К статье «Волшебный мир Анри Пуанкаре»

1. У к а з а н и е. а) Нужно заметить, что евклидовы касательные, проведенные к «верхним» полуокружностям, перпендикулярным к полуокружности L_0 , через точки их пересечения с L_0 , пересекаются в евклидовом центре O_0 . б) Докажите, что для пересекающихся «верхних» полуокружностей имеется единственная точка на оси x -ов, такая, что длины касательных, проведенных из нее к этим полуокружностям, равны (рассмотрите два случая; см. рис. 8, а и б в статье).

2. «Опуская» основания $A_i C_i$ равнобедренных n -треугольников $A_i B C_i$ (см. рис. 9 в статье) к границе нашей полуплоскости, видим, что вначале n -перпендикуляры к сторонам этих треугольников, проходящие через их n -середины, пересекаются в одной точке, затем становятся параллельными, и, наконец, сверхпараллельными. Ясно, что в последних двух случаях вокруг соответствующих n -треугольников $A_i B C_i$ окружность описать не удастся.

4. Докажем четвертый признак конгруэнтности для равнобедренных n -треугольников, т. е. докажем, что равнобедренный n -треугольник однозначно определяется своими углами.

Сделаем такое n -перемещение, чтобы осью симметрии треугольника ABC стала прямая $L(0, \infty)$. Пусть φ — величина угла при вершине B , а ψ — величина угла при основании.

Можно считать, что ордината точки B равна 1. Тогда n -прямые AB и BC однозначно определены (рис. 1); пусть O_1 и O_2 — их

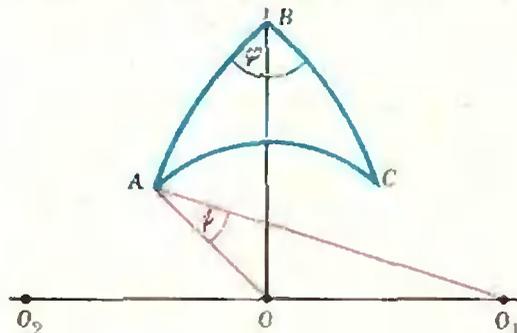


Рис. 1.

евклидовы центры (точки O_1 и O_2 симметричны относительно $O = (0; 0)$). Очевидно, что евклидовым центром n -прямой AB является точка O . Нам нужно определить положение точек A и C . Но $\widehat{AO_1O} = \psi$ (в евклидовом смысле). Поэтому нужно построить дугу окружности с центром в точке O , из точек которой отрезок OO_1 виден под углом ψ ; эта дуга и даст нам положение вершин A и C .

5. Сделаем n -перемещение, переводящее $L(\alpha, \beta)$ в $L(0, \infty)$. Пусть, при этом n -прямые $L(\alpha, \beta_1)$, $L(\alpha, \beta_2)$ перейдут в n -прямые $L(0, \gamma_1)$, $L(0, \gamma_2)$ соответственно (рис. 2). n -перемещение F_λ , $\lambda = \gamma_2/\gamma_1$ переводит $L(0, \infty)$ в себя, а $L(0, \gamma_1)$ в $L(0, \gamma_2)$, если γ_1, γ_2 одного знака. В противоположном случае надо добавить отражение.

6. В Пуанкари сравнительно легко научиться восставлять перпендикуляры к n -прямым, но труднее опускать их. Гораздо проще иметь дело с n -прямой $L(0, \infty)$: ей перпендикулярны все n -прямые вида $L(-\alpha, \alpha)$ (полуокружности с центром в нуле). Поэтому сделаем n -перемещение, переводящее L_0 в $L(0, \infty)$.

1) Пусть L_1 пересекает $L_0 = L(0, \infty)$. Тогда (рис. 3, а) $L_1 = L(-\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$. Перпендикуляры из точек n -прямой L_1 к L_0 будут иметь вид $L(-\gamma, \gamma)$, где $\alpha < \gamma < \beta$, и поэтому проекция L_1 на L_0 совпадает с интервалом (α, β) на n -прямой $L(0, \infty)$.

2) Пусть L_1 параллельна $L_0 = L(0, \infty)$. Тогда либо $L_1 = L(\gamma, \infty)$, и ее проекцией будет луч $(|\gamma|, \infty)$ (рис. 3, б), либо $L_1 = L(0, \alpha)$, и тогда L_1 проектируется в n -луч $(0, |\alpha|)$ на $L(0, \infty)$ (рис. 3, в).

3) $L(\alpha, \beta)$ сверхпараллельна $L(0, \infty)$, если $\alpha\beta > 0$.

Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$. Тогда проекцией будет интервал (α, β) (рис. 3, г).

7. Пусть $L_0 = L(0, \infty)$, $L_1 = L(-1, 1)$ (это всегда можно добиться, сделав n -перемещение). Если y — ордината точки A (рис. 4), то $x = \rho(A, A_0) = |\ln y|$, где $A_0 \in L_1$ имеет ординату 1. Тогда $y = e^x$. Пусть $L(\alpha, 1)$ — параллель к L_1 , проходящая через A ; C — евклидов центр этой полу-

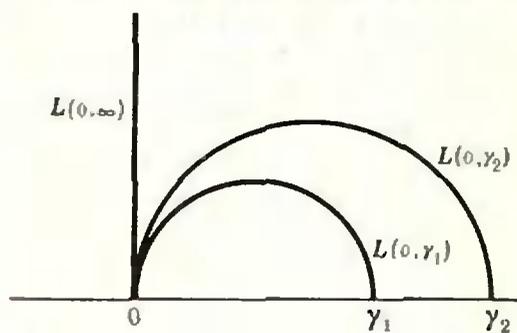


Рис. 2.

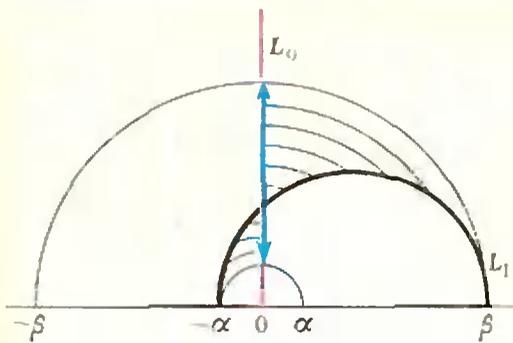


Рис. 3а.

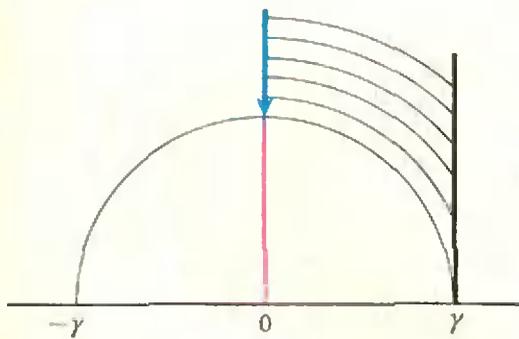


Рис. 3б.

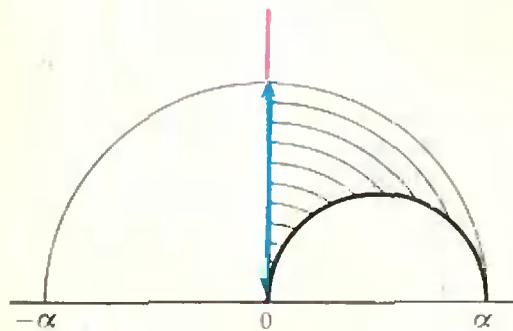


Рис. 3в.

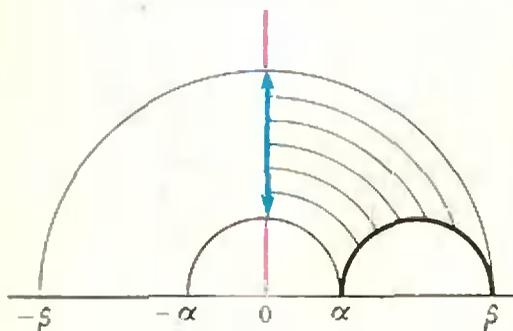


Рис. 3г.

окружности. Тогда

$$|OA| = y = e^x, \quad |AC| = \frac{|OA|}{\sin \varphi(x)},$$

$$|CO| = \frac{|OA|}{\operatorname{tg} \varphi(x)}, \quad |AC| - |CO| = 1,$$

$$\begin{aligned} \text{откуда} \quad \frac{1}{y} = e^{-x} &= \frac{1}{\sin \varphi(x)} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi(x)} = \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\varphi(x)}{2}, \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 2 \operatorname{arccctg} e^{-x}. \end{aligned}$$

К статье «Логарифмические и показательные...»

$$1. \quad x < -\sqrt[3]{5}, \quad x > \sqrt[3]{5}. \quad 2. \quad x =$$

$$= \log_3 \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{2}. \quad 3. \quad x = \sqrt[3]{3}. \quad 4. \quad x = 2. \quad 5.$$

$$a \leq -2, \quad a \geq 0. \quad 6. \quad x = 9. \quad 7. \quad 0 < x < \frac{1}{2},$$

$$1 < x < 2, \quad 3 < x < 6. \quad 8. \quad 2 < x < \frac{5}{2}.$$

Указание. На множестве допустимых значений неизвестного $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}, \quad x \neq 2$

исходное уравнение равносильно уравнению $(2x+1)(x-2) - |x-2| = 0$. 9. $x_1 = 2, \quad x_2 = 4$. Указание. Привести уравнение к виду $(x^2 - 4)(2^{1+\sqrt{2x+1}} - 2^x) = 0$.

$$10. \quad \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < x < -1, \quad \frac{1 + \sqrt{21}}{2} < x < 3.$$

$$11. \quad -2 - \sqrt{5} < x < -2 - \sqrt{3}, \quad -2 + \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{5}.$$

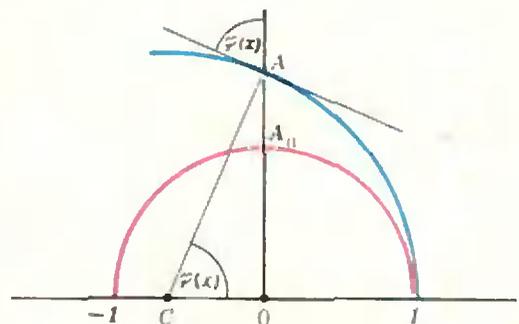


Рис. 4.

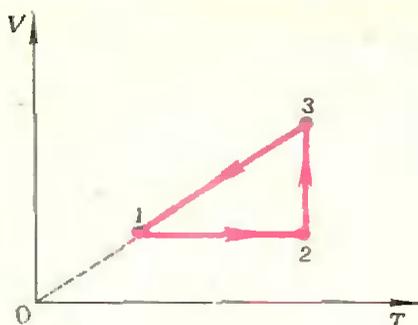


Рис. 5.

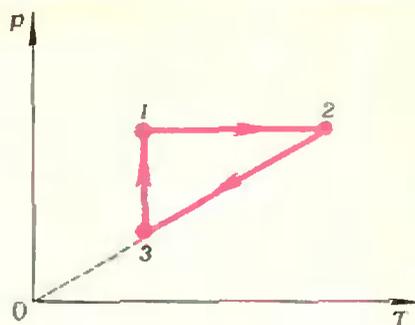


Рис. 6.

К статье «Применение диаграмм тепловых процессов»

1. Параметры систем I и II связаны соотношением $\frac{m_1 T_1}{\mu_1} > \frac{m_{11} T_{11}}{\mu_{11}}$. Возможны, например, такие частные случаи:
 а) $T_1 > T_{11}$, если $m_1 = m_{11}$ и $\mu_1 = \mu_{11}$;
 б) $m_1 > m_{11}$, если $T_1 = T_{11}$ и $\mu_1 = \mu_{11}$;
 в) $\mu_1 < \mu_{11}$, если $m_1 = m_{11}$ и $T_1 = T_{11}$.

2. См. рис. 5.

$$3. \quad A = \frac{m}{\mu} R (T_1 + T_3 - T_2 - T_4).$$

У к а з а н и е. Изобразить данный цикл на диаграмме (p, V) .

4. Газ получает теплоту в процессе $1 \rightarrow 2$ и отдает ее в процессах $2 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 1$.
 См. рис. 6.

К статье «Московский физико-технический институт»

Математика

Билет 1

1. Пусть a — первый член, q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда

$$\begin{cases} \frac{a}{1-q} - \frac{a(1-q^3)}{1-q} = 2, \\ \frac{a(1-q^6)}{1-q} = 3. \end{cases}$$

Исключив a , получим $2q^6 + 3q^3 - 2 = 0$, откуда $q^3 = -2$ и $q^3 = \frac{1}{2}$. Очевидно, возможно только $q^3 = \frac{1}{2}$; тогда $S = 4$.

2. Преобразуя левую часть, получаем

$$\frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 32 \cos^3 2x.$$

Отсюда

$$а) \cos 2x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};$$

$$б) 1 = 2 \sin^2 4x, \quad \cos 8x = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Легко проверить, что для всех найденных значений x функции $\lg x$ и $\operatorname{ctg} x$ определены.

3. Из точки B опустим перпендикуляр на плоскость грани Q ; поскольку двугранный угол — острый, основание D этого перпендикуляра расположено в самой грани Q (рис. 7). Перпендикуляры, опущенные из точек B и D на ребро двугранного угла, очевидно, имеют общее основание E . Угол BED — линейный угол данного двугранного угла. Перпендикуляр из точки D на AC пройдет через точку A ($AC \perp AB$, $BD \perp Q$).

В треугольниках ABE , AED имеем: $BE = AB \cdot \sin \alpha$, $AE = AB \cdot \cos \alpha$, $ED = BE \cdot \cos \varphi = AB \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi$. Далее: $\operatorname{tg} \angle EAD = \frac{ED}{AE} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \varphi}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi$. Острый угол β между AC и ребром двугранного угла равен $\frac{\pi}{2} - \angle EAD$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi) = \\ &= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi). \end{aligned}$$

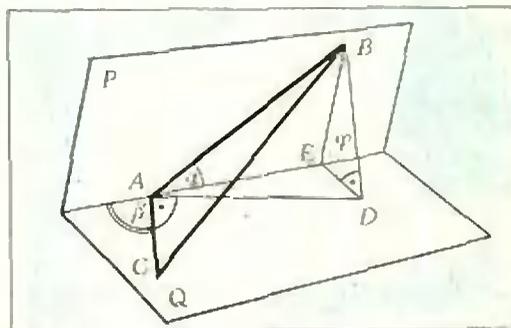


Рис. 7.

4. Во втором уравнении перейдем к основанию $\frac{2}{3}$: $(-\log_{\frac{2}{3}} x) \cdot (-\log_{\frac{2}{3}} y) - \log_{\frac{2}{3}}(x+y) = 0$, откуда $\log_{\frac{2}{3}}(x+y) = \log_{\frac{2}{3}} x \cdot \log_{\frac{2}{3}} y$. После подстановки в первое уравнение системы и преобразований получим

$$\left(1 - \log_{\frac{2}{3}}^2 y\right) \cdot \left(\log_{\frac{2}{3}}^2 x - 1\right) = 0.$$

Отсюда

$$a) \log_{\frac{2}{3}}^2 y = 1; \quad б) \log_{\frac{2}{3}}^2 x = 1.$$

В первом случае имеем $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = \frac{3}{2}$. Подставляя эти значения y в исходную систему, получим, что для значения $y_1 = \frac{2}{3}$ решений нет, а для значения $y_2 = \frac{3}{2}$ имеется решение $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$. Аналогично исследуется второй случай. Получим решение $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

5. Поскольку $AE \parallel DF$ и $AE = 2 \cdot DF$, то и $AM = 2 \cdot DM$ (рис. 8).

Пусть N — точка пересечения BC и EF . Поскольку $CF \parallel BE$ и $CF = 2 \cdot BE$, то и $CN = 2 \cdot BN$. Возможны лишь два положения точки N , удовлетворяющие этому условию (рис. 8, а, б).

Рассмотрим случай (а). Поскольку $NB = BC$ и $AD = DM$, то $NE = EF = FM = \frac{1}{3} MN$. Площади треугольников EDF и FDM равны ($EF = FM$, D — общая верши-

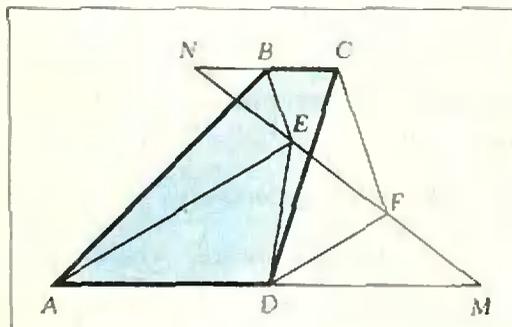


Рис. 8а.

на). Расстояние от точки F до прямой AD вдвое меньше расстояния от точки N до этой же прямой. Последнее равно высоте трапеции. Обозначим длину высоты через H , а длину BC через b . Тогда $DM = AD = 3b$. Площадь трапеции $S = 2bH$. Находим площадь треугольника EDF : $S_{\triangle EDF} = S_{\triangle FDM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} H \cdot 3b = \frac{1}{2} Hb$. Следовательно,

$$S_{\triangle EDF} = \frac{1}{4} S.$$

Рассмотрим случай (б). Поскольку $AD = DM$, то $EF = FM$; а поскольку $BN = \frac{1}{2} CN$, то $EN = \frac{1}{2} NF$. Отсюда $NF = \frac{2}{5} MN$, $FM = \frac{3}{5} MN$. Следовательно, расстояние от точки F до прямой AD составляет $\frac{3}{5}$ расстояния от точки N до этой прямой, то есть $\frac{3}{5} H$. Как и ранее, имеем

$$S_{\triangle EDF} = S_{\triangle FDM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} H \cdot 3b = \frac{9}{10} Hb = \frac{9}{20} S.$$

Билет 2

1. После простых преобразований получим $\sin 12x - \sin 8x = 0$. Отсюда $\sin 2x \times \cos 10x = 0$,

$$a) \sin 2x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi n}{2};$$

$$б) \cos 10x = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Необходимо, чтобы выполнялось условие $\cos 5x \neq 0$ (*).

В первом случае это означает, что $n \neq 2l + 1$, то есть решениями служат лишь значения $x = \pi l$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Во

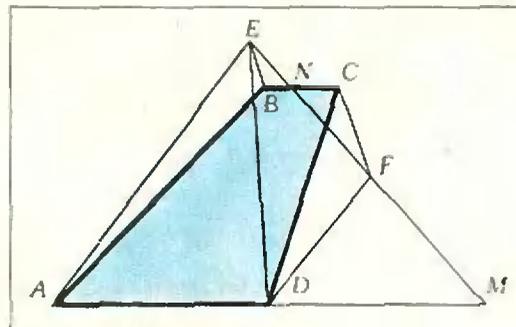


Рис. 8б.

втором случае все найденные значения x_2 удовлетворяют (*).

Ответ. $x = \pi l$, $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}$ (l, n — целые).

2. Преобразуем неравенство так:

$$\frac{\log_3(3 - 3^{1-x})}{x-1} \geq 0.$$

Это неравенство эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x-1 > 0, \\ 3-3^{1-x} \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x-1 < 0, \\ 0 < 3-3^{1-x} \leq 1. \end{cases}$$

В первом случае

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \geq 1 - \log_3 2, \end{cases}$$

откуда $x > 1$.

Во втором случае

$$\begin{cases} x < 1, \\ 0 < x \leq \log_3 \frac{3}{2}, \end{cases}$$

откуда $0 < x \leq \log_3 \frac{3}{2}$.

Ответ. $0 < x \leq \log_3 \frac{3}{2}$, $1 < x$.

3. $2 \sin^2 \alpha$. Указание. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$, $O_1 O_2 O_3 O_4$ — параллелограмм, высоты которого равны $AC/2$, $BD/2$, угол между ними α .

4. $V_1:V_2 = 1:2$, $V_2:V_3 = 1:3$. Указание. От момента выхода пешеходов до момента выезда велосипедиста прошло время $\frac{5S}{v_1}$

$\tau = \frac{6(v_1 + v_2)}{v_1 v_2}$, а до момента встречи первого пешехода с велосипедистом $t = \frac{4S}{9v_2}$.

Из условия встречи первого пешехода и велосипедиста получаем

$$t \cdot v_1 + (t - \tau) \cdot v_2 = S.$$

Из условия одновременного окончания движения этими же лицами получаем

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + \tau.$$

5. $\arccos \sqrt{\frac{2}{5}}$. Указание. Середина ребра AD удалена от плоскости SBC на то же расстояние, что и точка A (поскольку $AD \parallel BC$), это расстояние равно $AS \cdot \sin \alpha$ (α — искомый угол).

Физика

Билет 1

1. По третьему закону Кеплера имеем

$$\left(\frac{T_\Gamma}{T_3}\right)^2 = \left(\frac{a_\Gamma}{a_3}\right)^3.$$

Здесь T_Γ , T_3 — периоды обращения вокруг Солнца кометы Галлея и Земли соответственно, $a_\Gamma = r_{\min} + r_{\max}$, $a_3 = 2r_3$. Отсюда получим

$$r_{\max} \approx 5,2 \cdot 10^9 \text{ км.}$$

2. Запишем условие равновесия поршня в конечном состоянии и закон сохранения энергии:

$$kx = p_2 S = p_2 \frac{V_2 - V_1}{x},$$

$$\nu C_V (T_1 - T_2) = \frac{kx^2}{2}.$$

Здесь $kx^2/2$ — потенциальная энергия пружины, ν — число молей. Кроме того, для идеального газа

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 \text{ и } p_2 V_2 = \nu R T_2.$$

Отсюда

$$C_V = \frac{5}{2} R \approx 21 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{град)}.$$

3. Пусть мост сбалансирован, то есть ток через гальванометр не идет. Тогда на нелинейном элементе имеем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2R}, \quad U = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

(\mathcal{E} — э. д. с. внешней батареи, внутренним сопротивлением батареи пренебрегаем). При условии, что $I = 0,01 U^2$, находим: $I = 1,25a$. Ток батареи

$$I_0 = 2I = 2,5a.$$

4. $V = \frac{1}{3} l^3 \frac{F}{F+l} \left(1 + \frac{F}{F+l} + \frac{F^2}{(F+l)^2}\right)$. Указание. Изображение кубика имеет вид усеченной пирамиды, у которой размер большего основания $b = l$, размер меньшего основания $a = \frac{Fl}{F+l}$, расстояние между основаниями $h = \frac{Fl}{F+l}$.

Билет 2

1. Начальная скорость струи $v_0 = \frac{g}{\rho S} = 2 \text{ м/сек}$. Конечная скорость струи $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 6,6 \text{ м/сек}$. Время паде-

ния струи $t_1 = \frac{h}{(v + v_0)/2} = 0.46 \text{ сек.}$

Изменение силы давления, связанное с импульсом струи, $\Delta F_1 = qv = 1,3 \text{ н.}$ Изменение силы давления, определяемое весом накопившейся воды, $\Delta F_2 = qg(t - t_1)$, причём $\Delta F_{2\text{max}} = qgt_0 = 3,9 \text{ н.}$ Полное изменение силы давления $\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2$ (см. рис. 9).

2. Запишем уравнения состояния газа для начального и конечного состояний:

$$\begin{cases} p_0(V_1 + V_2) = \frac{m}{\mu} RT_0, \\ pV_1 = \frac{m_1}{\mu} RT, \\ pV_2 = \frac{m_2}{\mu} RT_0. \end{cases}$$

где $m = m_1 + m_2$. Отсюда

$$T = \frac{pT_0V_1}{p_0(V_1 + V_2) - pV_2} \approx 3^\circ\text{K.}$$

3. Напряжённость поля в конденсаторе

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ (Q — заряд конденсатора, r — расстояние от центра до выбранной точки). Выделим сферический слой малой толщины Δr (такой, что поле внутри слоя можно считать однородным). Изменение потенциала на толщине слоя

$$\Delta\varphi = E \Delta r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta r}{r^2}. \quad (1)$$

Сопrotивление этого слоя

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta r}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \frac{\Delta r}{r^2}. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta R} = \frac{Q}{\epsilon_0\rho} = \text{const} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R},$$

где $\varphi_2 - \varphi_1$ — разность потенциалов между обкладками конденсатора. Так как $\frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \epsilon C$, получаем

$$R = \frac{\epsilon_0\rho}{C} = 885 \text{ ом.}$$

4. Представим толстую линзу как систему из тонкой плоской-выпуклой линзы и приставленной к ней плоскопараллельной пластины толщиной 5 см. Для тонкой плоско-выпуклой линзы $\frac{1}{F} = (n-1) \frac{1}{R}$, откуда $F = 5 \text{ см.}$ Поэтому ход лучей в системе такой, как показано на рис. 10. Из этого рисунка $y = F \operatorname{tg} \alpha \approx F \operatorname{tg} \beta + x \operatorname{tg} \alpha$,

или $y \approx F \sin \alpha \approx F \sin \beta + x \sin \alpha$. Тогда

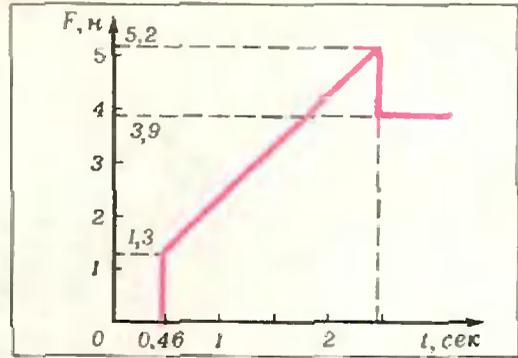


Рис. 9.

$$\frac{F}{F-x} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \text{ и } x = F \frac{n-1}{n} = \frac{5}{3} \text{ см.}$$

Билет 3

1. На Земле энергия сжатой пружины целиком переходит в кинетическую энергию конуса, а на орбите — в энергию конуса и ракеты:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_k^2}{2} + \frac{Mv_p^2}{2}.$$

Из закона сохранения импульса, записанного в системе отсчета, движущейся с орбитальной скоростью,

$$mv_k = Mv_p.$$

Из этих соотношений найдем скорости v_k и v_p . Тогда относительная скорость конуса и ракеты

$$v_{\text{отн}} = v_k + v_p = 5,6 \text{ м/сек.}$$

$$2. \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_0 - p_{n_2}}{p_0 - p_{n_1}} \frac{T_2}{T_1} = 0,91.$$

3. Поле максимально у поверхности внутренней сферы: $E = E_{\text{max}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ (q — заряд конденсатора, r — радиус внутренней сферы). Искомая разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R} \right) = E_{\text{max}} \left(r - \frac{r^2}{R} \right).$$

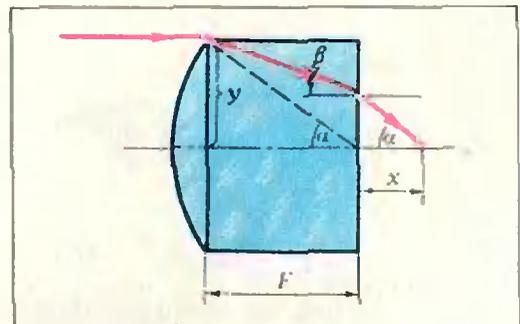


Рис. 10.

Максимум этого выражения достигается при $r = \frac{R}{2}$, поэтому

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{E_{\max}R}{4} = 3 \cdot 10^4 \text{ в.}$$

4. В первом случае имеем

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где f_1 и f_2 — фокусные расстояния плоско-выпуклых линз,

R_1 и R_2 — радиусы кривизны соответствующих выпуклых поверхностей.

Во втором случае система состоит из трех линз, поэтому

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - (n_b - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

(третья, двояковогнутая линза — рассеивающая).

Из этих соотношений получим

$$F_2 = F_1 \frac{n-1}{n-n_b} = 2F_1.$$

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 2)

1. Назовет Иван Царевич 1, 10, 100 и останется жив.

2. Налейте в сосуд воды. Мяч всплывет, и его можно будет вынуть.

3. Остывшее масло занимает меньший объем, чем горячее. «Освободившееся» место в сосуде занял воздух. Поэтому показания весов в конце дня должны быть больше, чем утром.

4. Шесть вопросов. 1) Верно ли, что номер твоей квартиры больше 32-х? 2) (Нет.) Верно ли, что он больше 16-ти? (Да.) Верно ли, что он больше 48-ми? И далее спрашивать про среднее число из оставшихся. После ответа на каждый вопрос интервал допустимых номеров уменьшается вдвое.

К статье «Все», «некоторые» и отрицание»

(см. «Квант» № 2)

1. Есть хотя бы один белый шар.

2. Все шары — белые.

3. Все шары — красные.

4. Некоторые равнобедренные треугольники не являются прямоугольными.

5. Некоторые ученики класса не были на собрании.

6. Ни одной девочки не было на собрании.

7. Некоторые углы данного шестиугольника — прямые или острые.

8. По крайней мере для одного x из A x^2 не превосходит 4.

9. Все люди — не дети.

10. Для всех x из A $x^2 - 2x + 1 \neq 0$.

11. Некоторые мужчины не выше 2-х метров.

12. Некоторые простые числа четны.

13. По крайней мере для одного простого числа p число $2^p - 1$ не является простым.

14. Неверно. Может быть один белый шар, а остальные — синие.

15. Верно.

16. Чтобы наверняка попался белый шар, надо вынуть по крайней мере 20 шаров. Меньшего числа может не хватить, ибо первыми могут быть вынуты красные и черные шары — их 19. Чтобы наверняка попались шары всех трех цветов, надо вынуть как минимум 22 шара; 21 может не хватить, если первыми вынуты все белые и черные шары; их как раз 21.

17. Надо вызвать 31 человека. Меньше нельзя — может случиться, что к доске выйдут лишь троечники и хорошисты (их $10+20=30$) и каждый ответит не более, чем на 4. Если же вызвать 31 человека, то по крайней мере один из них окажется отличником и ответит на 5.

18. Если выполнено условие а) или условие б), то выполнено и условие в), то есть выполнены одновременно два условия, что противоречит условию задачи. Значит, а) и б) не выполнены. Тогда в) также не выполнено, г) не выполнено, д) обязательно выполнено, е), ж) и з) не выполнены, про и) ничего нельзя сказать.

Поскольку выполнено может быть только одну условие из девяти, то и) не выполнено. Значит, надо из данного множества отобрать те n , которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 11. Таких чисел имеется пять, именно: 487, 491, 493, 497, 499.

Номер оформили:
Е. Веретнинова, С. Верховский, В. Карцев,
Г. Красиков, Э. Назаров, Я. Смирнов.

Корректор М. Медведская

113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.

Сдано в набор 23/ХІІ 1975 г.

Подписано в печать 1/ІІ 1976 г.

Бумага 70×100 $\frac{1}{16}$. Физ. печ. л. 5

Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6,78 Т-01883

Цена 30 коп. Заказ 2862. Тираж 326 700 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательства,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Пятью пять

$$\begin{array}{r} \times \text{ П Я Т Ь } \\ \text{ П Я Т Ь } \\ \hline \end{array}$$

○ ○ ○ ○ Ь

○ ○ ○ ○ Т

○ ○ ○ ○ Я

○ ○ ○ П

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Муха и слон

$$\begin{array}{r} \times \text{ М У Х А } \\ \text{ С Л О Н } \\ \hline \end{array}$$

○ ○ ○ ○ А

○ ○ ○ Х

○ ○ ○ У

○ ○ ○ М

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Враздник

П П Р О Г : И = Г О С Т И

Ребусы

В каждом из этих ребусов цифры зашифрованы буквами. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, в пустых клетках могут стоять любые цифры, в том числе и зашифрованные буквами, ни одно число не начинается нулем. Расшифруйте примеры.

Л. П. Мочалов

Мозаика букв

$$\begin{array}{r} \text{М} \times \text{О} = \text{З А} \\ \hline \text{И} \quad \quad \text{К А} \\ \hline \text{Б} + \text{У} = \text{К В} \end{array}$$

Шесть на шесть

$$\begin{array}{r} \times \text{ Ш Е С Т Ь } \\ \text{ Ш Е С Т Ь } \\ \hline \end{array}$$

○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○ Ш Е С Т Ь

Цена 30 коп.
Индекс 70465

